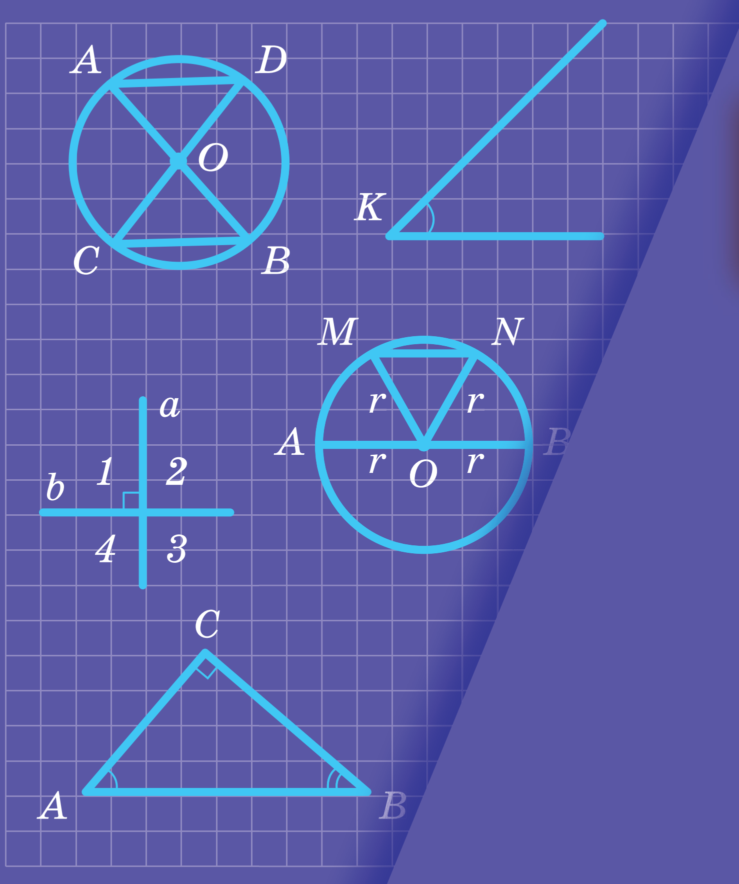
Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

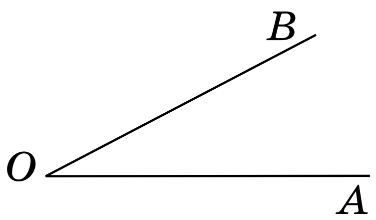
ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА 1



7

КУТ

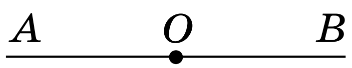


O **– вершина кута, *OA* і *OB* – сторони кута.**

Називають: кут *O*, або кут *AOB*, або кут *BOA* (букву *O*, що позначає його вершину, ставлять посередині).

Записують: $\angle$*O*, або $\angle$*AOB*, або $\angle$*BOA*.

Розгорнутий кут – це кут, сторони якого є доповняльними променями.



ВИДИ КУТІВ

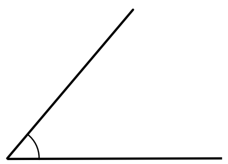
Якщо градусна міра кута дорівнює 90°, то такий кут називають *прямим*.

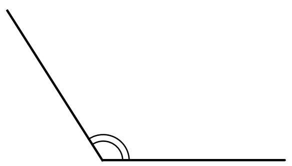
Якщо градусна міра кута менша від прямого кута (від 90°), то такий кут називають *гострим*.

Якщо градусна міра кута більша за прямий (за 90°) і менша від розгорнутого, то такий кут називають *тупим*.


Прямий

такий кут позначають знаком ⌐


Гострий


Тупий

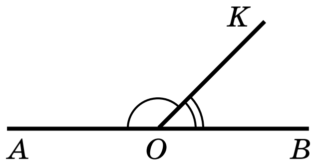
ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

СУМІЖНІ КУТИ

$\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні

$\angle AOK + \angle KOB = 180°$



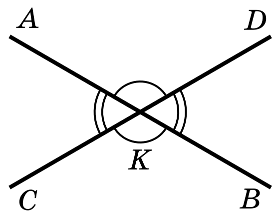
ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні

$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні

$\angle AKC = \angle DKB$

$\angle AKD = \angle CKB$



ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

✓ Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.

✓ Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

$a \parallel b$, якщо

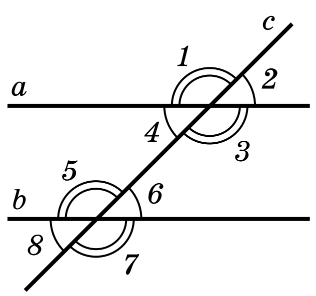
$\angle 1 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$),

або

$\angle 3 = \angle 5$ ($\angle 4 = \angle 6$),

або

$\angle 3 + \angle 6 = 180°$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180°$)



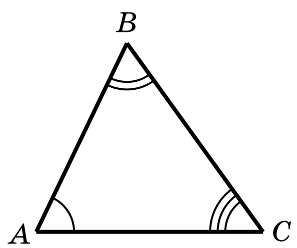
ТРИКУТНИК

$P = AB + BC + CA$

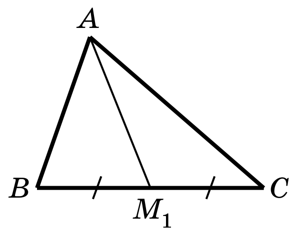
$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$|AB - BC| < AC < AB + BC$

(нерівність трикутника)

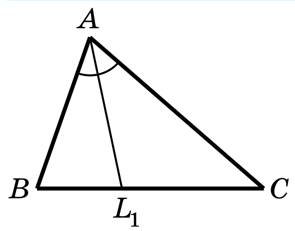


МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА



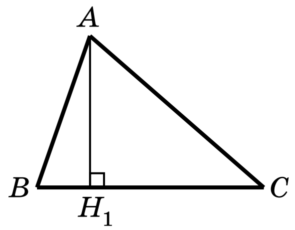
$BM_1 = M_1C$

AM_1 – медіана $\triangle ABC$



$\angle BAL_1 = \angle CAL_1$

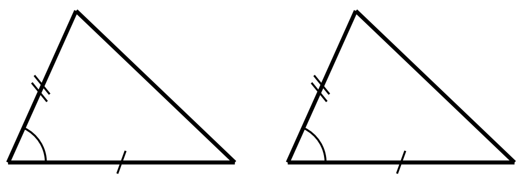
AL_1 – бісектриса $\triangle ABC$



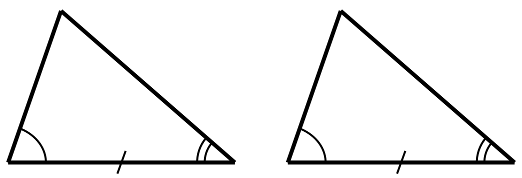
$AH_1 \perp BC$

AH_1 – висота $\triangle ABC$

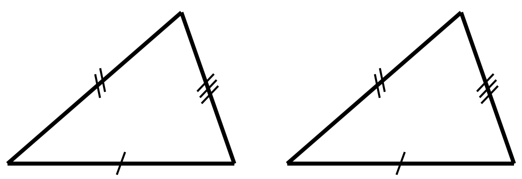
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

ГЕОМЕТРІЯ

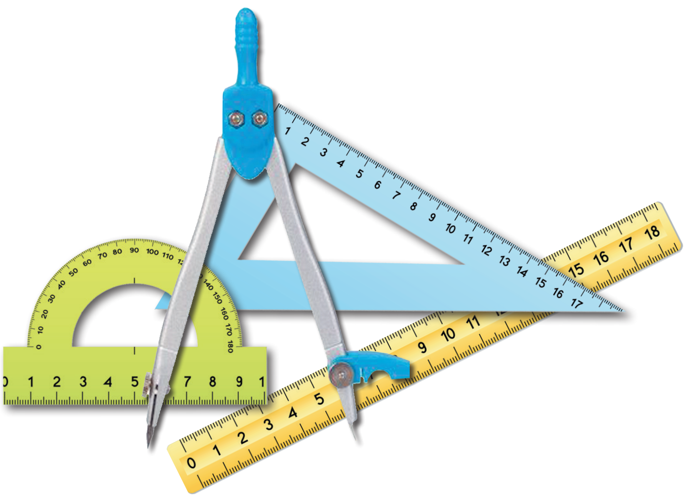
Підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)

7 клас

(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Київ
«Генеза»
2024

УДК 514*кл7(075.3.056.262)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О. С.
І-89 Геометрія : підруч. для осіб з особливими освіт. потребами (Н 54.1–Н 54.2) : 7 кл. (У 2 ч.) : Ч. 1 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 144 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-

ISBN 978-617-8353- (ч. 1)

УДК 514*кл7(075.3.056.262)

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для осіб з особливими освітніми потребами
(Н 54.1–Н 54.2)

7 клас

(у 2 частинах)

ЧАСТИНА 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей».

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел Інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Олена Мовчан*. Обкладинка *Олени Мамаєвої*. Макет, художнє оформлення, комп’ютерна обробка ілюстрацій *Василя Марущинця*. Комп’ютерна верстка *Юрія Лебедєва*. Коректор *Інна Борік*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. __,__. Обл.-вид. арк. __,__.
Тираж __________ пр. Вид. № _____. Зам. № ____________.

ТОВ «Генеза», вул. Генерала Алмазова, б. 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано

.

ISBN 978-617-8353-
ISBN 978-617-8353- (ч. 1)

Шановні семикласниці й семикласники!

Ви починаєте вивчати один з найцікавіших предметів – **геометрію** (у перекладі з грецької *гео* – земля, *метрео* – міряти). Виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людини. Ще давні єгиптяни та греки близько трьох тисяч років тому вміли виконувати різні вимірювання, потрібні для розмічування ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово складалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

Пізніше, завдяки давньогрецьким ученим Фалесу, Піфагору, Евкліду та іншим, дедалі більшу роль у геометрії стали відігравати системи міркувань, які давали змогу доводити нові формули та факти на основі раніше відомих. На початок нашої ери геометрія вже сформувалася як наука, у якій властивості геометричних фігур вивчають шляхом міркувань.

Отже, геометрія виникла на основі діяльності людини. Спочатку вона використовувалася суто практично, але згодом сформувалася як самостійна математична наука.

Оволодіти матеріалом курсу вам допоможе цей підручник. Вивчаючи теоретичний матеріал, зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Так виділено нові, незнайомі поняття.

У підручнику є такі умовні позначення:

 – пригадай (раніше вивчене);

! – зверни особливу увагу;

? – запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113 – завдання для класної і 115 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);

– теорема;

– наслідок з теореми;

■ – кінець доведення теореми або задачі;

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для повторення;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– рубрика «Головне в розділі».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу»* та *«Задачі підвищеної складності»*. Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики *«Цікаві задачі – поміркуй одначе»*.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов’язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв’язати самостійно.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів розміщено в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаю успіхів на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Правильне їх розв’язання вчитель/-ка може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв’язати задачі та вправи, що їй під силу, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 7-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв’язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

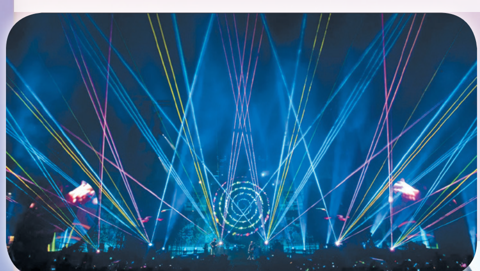
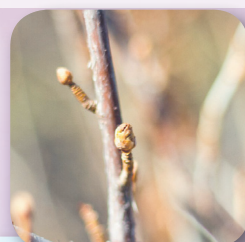
Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв’язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Розділ **1**

ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** елементарні геометричні фігури: точку, пряму, промінь, кут, відрізок;
- **дізнаєтеся** про основні властивості елементарних геометричних фігур;
- **навчитеся** розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками та кутами.


§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

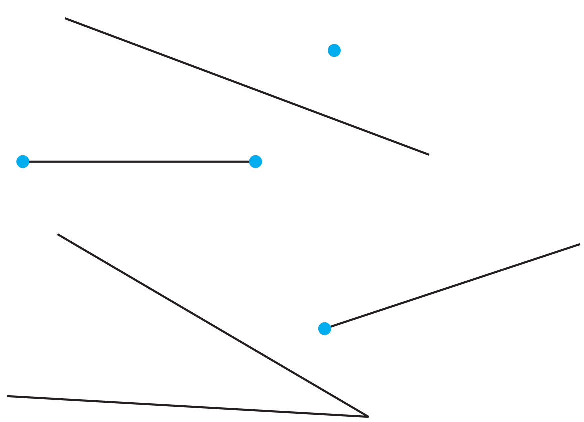
Геометрія

З уроків математики ви вже знаєте деякі геометричні фігури: точку, пряму, відрізок, промінь, кут (мал. 1.1), трикутник, прямокутник, коло (мал. 1.2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з іншими важливими фігурами та їхніми властивостями.

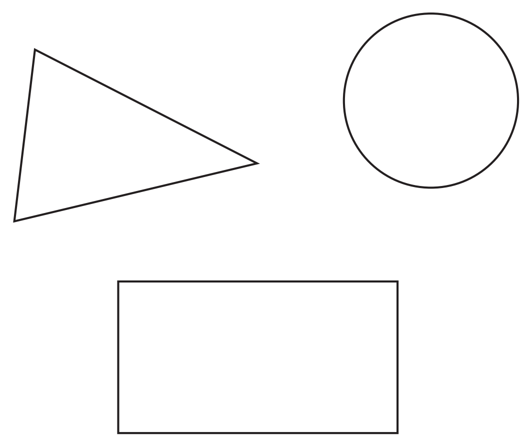
! Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Точка

Найпростіша геометрична фігура – ***точка***. Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди.



Мал. 1.1

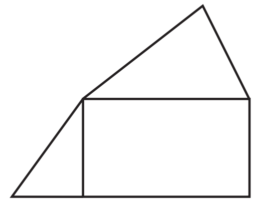


Мал. 1.2

З точок складаються всі інші геометричні фігури.

Будь-яка множина точок є геометричною фігурою.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об’єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 1.3 фігура складається з прямокутника і двох трикутників.



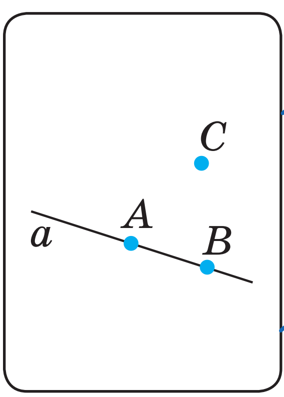
Мал. 1.3

Одна з основних геометричних фігур – ***площина***. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має ані краю, ані товщини. У 7–9-му класах ви вивчатимете частину шкільного курсу геометрії – ***планіметрію***.

> **!** Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Пряма

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому ми зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають маленькими латинськими буквами *a*, *b*, *c*, *d*, ..., а точки – великими латинськими буквами *A*, *B*, *C*, *D*, ...



Точки *A* і *B* *лежать* на прямій *a*, або **пряма *a* *проходить через* точки *A* і *B*.**

Кажуть: «Точки *A* і *B* *належать прямій a*».

Точка *C* *не лежить* на прямій *a*.

Кажуть: «Точка *C* *не належить прямій a*», або **«Пряма *a* *не проходить через* точку *C*».**

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 9 09.07.2024 12:44:06

! Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Кажуть:		Записують:
«Точка *A належить прямій a*».	→	***A*** $\in$ ***a*.**
«Точка *C не лежить* на прямій *a*».	→	***C*** $\notin$ ***a*.**

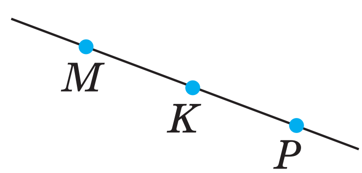
Зауважимо, що через точки *A* і *B* не можна провести іншої прямої, яка б не збігалася з прямою *a*.

! Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі», вважатимемо, що ці точки, прямі – різні.

Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад *A* і *B*, записують двома буквами: *AB* або *BA*. Якщо точка *C*, наприклад, не належить прямій *AB*, це записують так: *C* $\notin$ *AB* – і кажуть, що *точки A*, *B і C не лежать на одній прямій*.

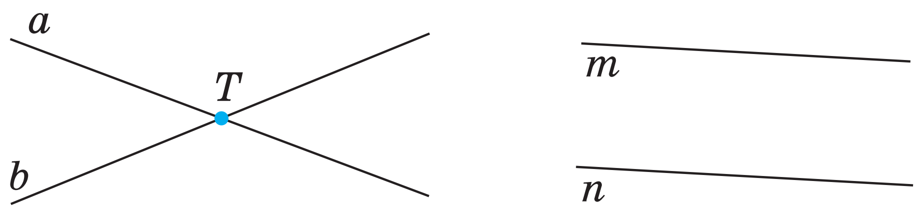
Точки *M*, *K* і *P* лежать на одній прямій (мал. 1.4), причому точка *K* лежить між точками *M* і *P*.



Мал. 1.4

! З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони *перетинаються* в цій точці. На малюнку 1.5 прямі *a* і *b* перетинаються в точці *T*, а прямі *m* і *n* не перетинаються.

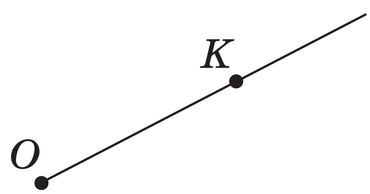


Мал. 1.5

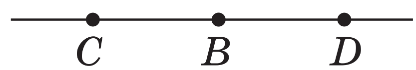
Промінь

Проведемо пряму та позначимо на ній точку *A* (мал. 1.6). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою *A* називають ***променем***, що виходить з точки *A*. Точку *A* називають ***початком*** кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга – деяку точку на промені (наприклад, промінь *OK* на малюнку 1.7).

Мал. 1.6



Мал. 1.7



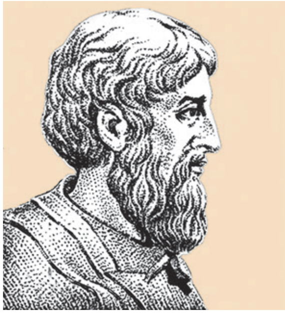
Мал. 1.8

Доповняльні промені

Два промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають ***доповняльними***. На малюнку 1.8 промінь *BC* є доповняльним для променя *BD*, і навпаки, промінь *BD* є доповняльним для променя *BC*.

А ще раніше... Перші відомості про властивості геометричних фігур люди отримували з практичної діяльності та спостережень за довколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об’ємів тіл, дійшов до нас із Давнього Єгипту. Він датується

XVII ст. до н. е. Описані в цьому творі правила обчислення площ та об'ємів отримали з практики. Жодних логічних доведень їх істинності не наводилося. Самі ж значення площ та об'ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.



Фалес
(бл. 640–548 рр. до н. е.)

Про зародження геометрії у Давньому Єгипті давньогрецький історик Геродот (V ст. до н. е.) писав: «Сезострис, єгипетський фараон, розділив землю, давши кожному єгиптянину ділянку за жеребкуванням, та стягував відповідно податок з кожної ділянки. Бувало, що Ніл заливав ту чи ту ділянку, тоді потерпілий звертався до фараона, а той посилав землемірів, щоб установити, на скільки зменшилася ділянка, і відповідно зменшував податок. Так виникла геометрія в Єгипті, а звідти перейшла в Грецію».

Піфагор
(бл. 580–500 рр. до н. е.)

Саме в Давній Греції і відбулося становлення геометрії як науки. Завдяки грецьким геометрам Фалесу, Піфагору, Демокріту (бл. 460–370 рр. до н. е.) відбувся поступовий перехід від практичної до теоретичної геометрії.

Ці та інші вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів і теорем, збагатили науку численними теоремами, які ми використовуємо й донині.

Так було створено науку, що вивчає форми, розміри, властивості, взаємне розміщення геометричних фігур. Цю науку, як і раніше, називають *геометрією*, хоча її зміст вийшов далеко за межі вчення про вимірювання землі.

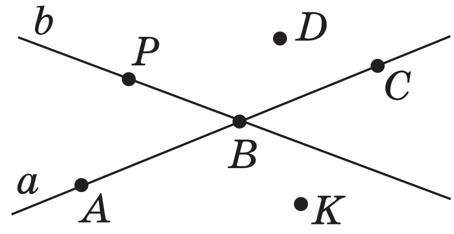
? Що вивчає геометрія? • Наведіть приклади геометричних фігур. • Назвіть основні геометричні фігури на площині. • Як позначають прямі та точки? • Скільки прямих можна провести через дві точки? • Що таке промінь? • Як позначають промені? • Які промені називають доповняльними?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1. Назвіть за малюнком 1.9:

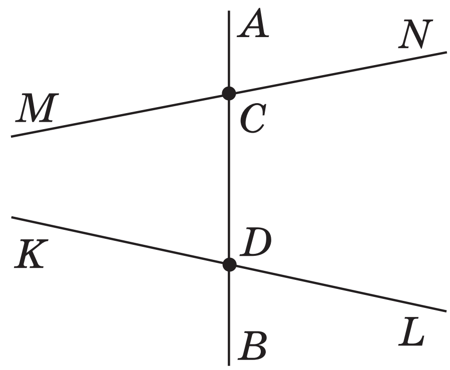
1) точки, що належать прямій *a*;
2) точки, що належать прямій *b*;
3) точку, що належить і прямій *a*, і прямій *b*;
4) точки, що належать прямій *a*, але не належать прямій *b*;
5) точки, що не належать ані прямій *a*, ані прямій *b*.



Мал. 1.9

2. Позначте в зошиті точки *M* і *N* та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку *K*, що належить побудованій прямій, та точку *L*, яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

3. Проведіть пряму *a*. Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розміщення прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.



Мал. 1.10

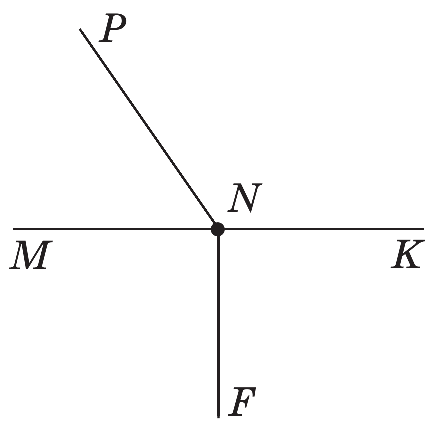
2

4. На малюнку 1.10 пряма *AB* перетинає прямі *MN* і *KL* у точках *C* і *D*. Запишіть:

1) усі промені з початком у точці *C*;
2) пари доповняльних променів, початок яких – точка *D*.

5. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 1.11.

2) Чи є серед цих променів пари доповняльних променів?



Мал. 1.11

3 **6**. Позначте в зошиті точки M, N, F так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.

7. Позначте в зошиті точки B, C і D так, щоб записи CD і CB позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

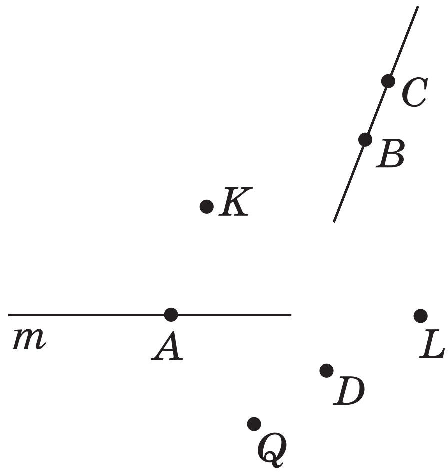
8. Використовуючи малюнок 1.12:

1) з'ясуйте, чи перетинаються прямі m і CB;

2) запишіть усі точки, які належать прямій m;

3) запишіть усі точки, які належать прямій BC;

4) запишіть точки, які не належать ані прямій m, ані прямій BC.



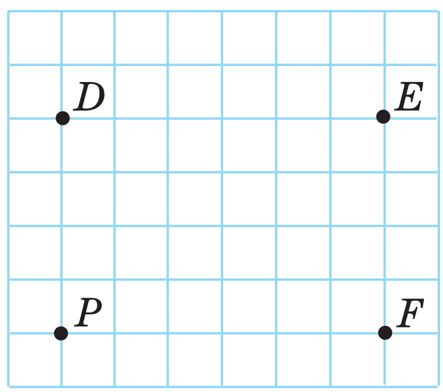
Мал. 1.12

4 **9**. Позначте в зошиті точки D, E, F, P, як на малюнку 1.13.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть назви всіх цих прямих.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?



Мал. 1.13

10. Позначте в зошиті три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 14 09.07.2024 12:44:09

11. Точка *A* ділить пряму *m* на два промені. За якої умови точки *B* і *C* цієї прямої належать одному променю; різним променям?

Життєва математика

12. Парк має форму прямокутника розмірами 800 м і 600 м, по периметру якого є доріжка для бігу, ходьби або велосипедних прогулянок.

1) Семикласник Вадим веде здоровий спосіб життя та щоранку пробігає по доріжці в парку зі швидкістю 14 км/год. Скільки часу витрачає учень на пробіжку?

2) Батьки Вадима також ведуть здоровий спосіб життя та щовечора прогулюються доріжкою парку, на це вони витрачають 50 хв. З якою швидкістю прогулюються батьки Вадима?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13. Накресліть відрізок *MN*, позначте на ньому точки *A* і *B*. Запишіть усі утворені відрізки з кінцями в точках *M*, *N*, *A* і *B*.

14. Побудуйте відрізки *AB* і *DC* так, щоб $AB = 5$ см, $CD = 6$ см 2 мм. Порівняйте довжини відрізків.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

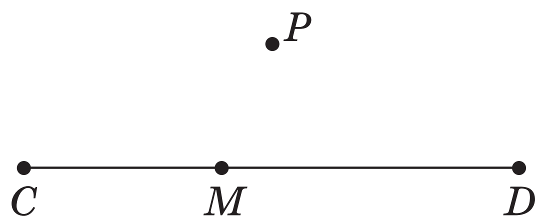
15. На площині проведено три прямі. На першій позначено 2023 точки, на другій – 2024, а на третій – 2025 точок. Яку найменшу загальну кількість точок при цьому може бути позначено?

§ 2. Відрізок. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками

Відрізок

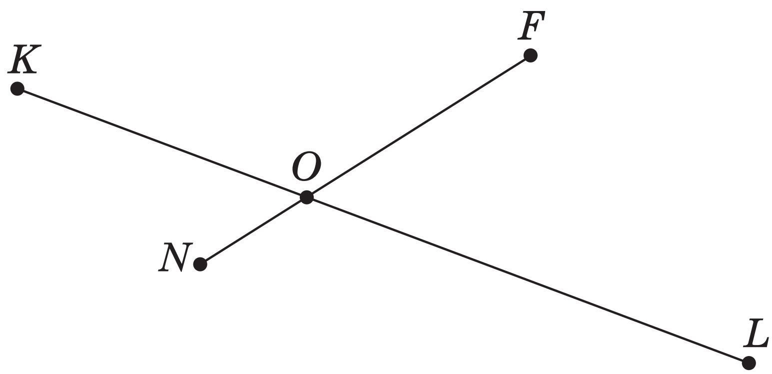
Відрізком **називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.**

Мал. 2.1



Мал. 2.2

На малюнку 2.1 зображено відрізок AB, або відрізок BA; точки A і B – його кінці. На малюнку 2.2 точка M належить відрізку CD (її ще називають ***внутрішньою точкою*** відрізка), а точка P йому не належить.



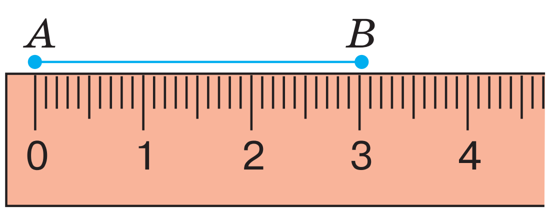
Мал. 2.3

На малюнку 2.3 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.

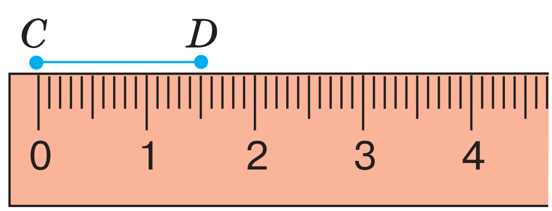
Вимірювання відрізків

На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього потрібно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 2.4 довжина відрізка AB дорівнює 3 см. Коротко кажуть: «Відрізок AB дорівнює 3 см». На малюнку 2.5 довжина відрізка CD дорівнює 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так: $AB = 3$ см, $CD = 1{,}5$ см $= 15$ мм.



Мал. 2.4



Мал. 2.5

! Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

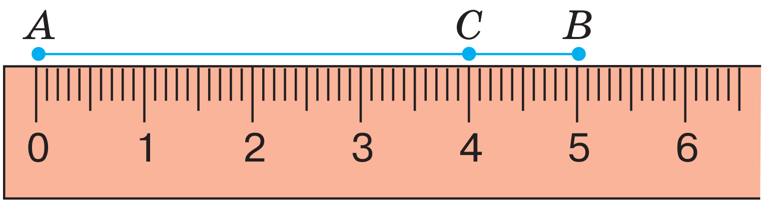
Іншими інструментами, якими можна вимірювати відрізки, є складаний метр (мал. 2.6), рулетка (мал. 2.7), клейончастий сантиметр (мал. 2.8).

Мал. 2.6

Мал. 2.7

Мал. 2.8

На малюнку 2.9 зображено відрізок AB. Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB (кажуть також, що точка C належить відрізку AB). Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Отже, $AC + CB = AB$.



Мал. 2.9

Маємо *основну властивість вимірювання* відрізків.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***. На малюнку 2.9 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.

Приклад 1. Чи лежать точки A, B і K на одній прямій, якщо:
1) $AB = 10$ см, $AK = 6$ см, $KB = 4$ см;
2) $AB = 9$ см, $AK = 6$ см, $KB = 5$ см?

Розв'язання. Якщо три точки A, B і K лежать на одній прямій, то довжина більшого з трьох відрізків AB, AK і KB має дорівнювати сумі довжин двох менших.

1) Оскільки $10 = 6 + 4$, то $AB = AK + KB$. Точки A, B і K лежать на одній прямій, причому точка K лежить між точками A і B.

2) Оскільки $9 \neq 6 + 5$, то $AB \neq AK + KB$. Точки A, B і K не лежать на одній прямій.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

Приклад 2. Точка K належить відрізку AB, довжина якого 15 см. Знайти довжини відрізків AK і KB, якщо AK більший за KB на 3 см.

Розв'язання. Розглянемо малюнок, на якому точка K належить відрізку AB, $AB = 15$ см.

1) Нехай $KB = x$ см, тоді $AK = (x + 3)$ см.
2) Оскільки $AK + KB = AB$ (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

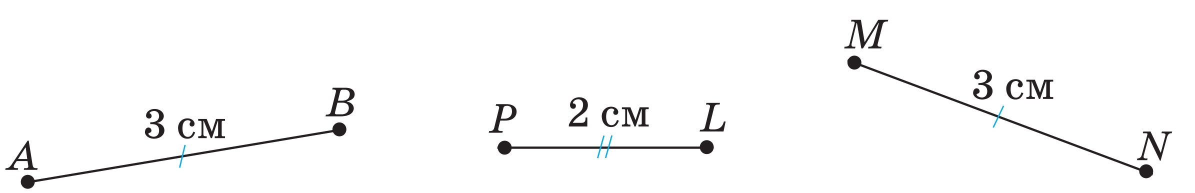
$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв'яжемо це рівняння:
$2x + 3 = 15$;
$x = 6$ (см).
3) Отже, $KB = 6$ см, $AK = 6 + 3 = 9$ (см).
Відповідь: $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.

Порівняння довжин відрізків

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їхні довжини.

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 2.10 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB, тому ці відрізки рівні між собою. Можна записати: $MN = AB$. На цьому самому малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL. Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL, записують це так: $MN > PL$.



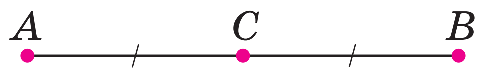
Мал. 2.10

На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок, а відрізки неоднакової довжини – різною кількістю рисочок.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 19 09.07.2024 12:44:12

Середина відрізка

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівних між собою відрізки, називають ***серединою відрізка***.



$AC = 2$ см, $CB = 2$ см, → **тому точка C – середина відрізка AB.**

Очевидно, що

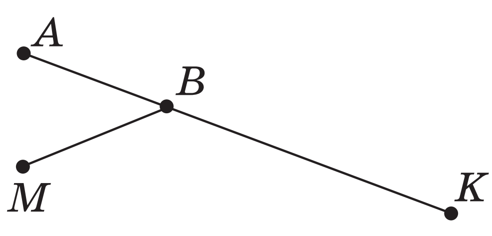
! якщо два відрізки рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох відрізків рівні, то й самі відрізки рівні.

? Що називають відрізком? • Що таке кінці відрізка? • Які одиниці вимірювання довжини ви знаєте? • Якими інструментами вимірюють довжини відрізків? • Що називають відстанню між двома точками? • Сформулюйте основну властивість вимірювання довжин відрізків. • Які відрізки називають рівними? • Яку точку називають серединою відрізка?

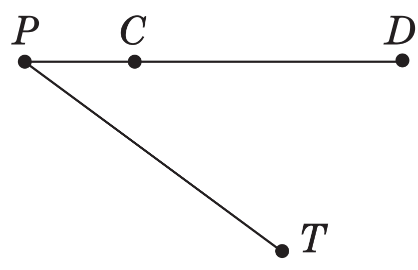
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **16.** Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 2.11. Виміряйте довжини двох з них.

17. Запишіть усі відрізки, зображені на малюнку 2.12, та виміряйте довжини трьох з них.



Мал. 2.11



Мал. 2.12

18. Позначте в зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

19. Накресліть відрізки AB і MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN.

20. Накресліть відрізки KL і FP так, щоб $KL = 5$ см 9 мм, $FP = 6$ см 8 мм. Порівняйте довжини відрізків KL і FP.

21. Точка C лежить між точками A і B (мал. 2.13). Знайдіть:
1) AB, якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;
2) BC, якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм.

Мал. 2.13

Мал. 2.14

22. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 2.14). Знайдіть:
1) PQ, якщо $PK = 3$ дм, $KQ = 7$ дм;
2) PK, якщо $PQ = 8$ см, $KQ = 6$ см.

23. Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:
1) $KL = 8$ см, $LM = 3$ см, $KM = 11$ см;
2) $KL = 5$ см, $LM = 9$ см, $KM = 8$ см?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

24. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 7$ см, $BC = 3$ см, $AC = 9$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AC = 7$ см?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

25. На прямій позначено точки P, L і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0,74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

26. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $AB = 12$ см, $BC = 1{,}5$ дм, $AC = 40$ мм?

27. На малюнку 2.15 довжини відрізків AB і CD однакові. Обґрунтуйте, чому $AC = BD$.

Мал. 2.15

28. На малюнку 2.15 довжини відрізків AC і BD однакові. Обґрунтуйте, чому $AB = CD$.

29. Точки C і D належать відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см.

30. Точки C і D належать відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $MN = 50$ см, $MC = 40$ см, $ND = 16$ см.

31. Точки C, D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M – 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

32. На прямій позначено точки A, M і N, причому $AM = 7{,}2$ см, $MN = 2{,}5$ см. Знайдіть відстань між точками A і N. Скільки розв'язків має задача?

33. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву першої столиці України.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 14 дм. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо	AC	BC
AC втричі менший від BC	В	Х
AC більший за BC на 1,8 дм	Р	К
$AC : BC = 3 : 2$	А	І

10,5 дм	8,4 дм	7,9 дм	6,1 дм	5,6 дм	3,5 дм

34. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище українського поета та правозахисника. Дізнайтеся з інтернету про його біографію, творчий шлях і боротьбу за незалежність України.

Точка M належить відрізку $CD = 8{,}4$ см. Визначте довжину відрізків CM і DM, якщо	CM	DM
CM більший за DM на 0,6 см	У	Т
$CM : DM = 1 : 3$	С	С

2,1 см	3,9 см	4,5 см	6,3 см

Життєва математика

35. На хімічному комбінаті, де у великій кількості є отруйні й небезпечні для життя речовини, унаслідок аварії стався витік хлору. У безвітряну погоду хлор стелиться по землі. Поширюючись, він займає ділянку поверхні у формі круга.

1) Обчисліть площу зараженої території, якщо відстань від місця витоку хлору до межі по радіусу 200 м.

2) Обчисліть, якої довжини мотузка знадобиться для огородження зараженої зони.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

36. Назвіть вид кута (гострий, прямий, тупий, розгорнутий), градусна міра якого дорівнює:

1) $52°$; 2) $180°$; 3) $129°$;
4) $90°$; 5) $2°$; 6) $173°$.

37. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:

1) $60°$; 2) $25°$; 3) $90°$;
4) $110°$; 5) $180°$; 6) $145°$.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 23 09.07.2024 12:44:14

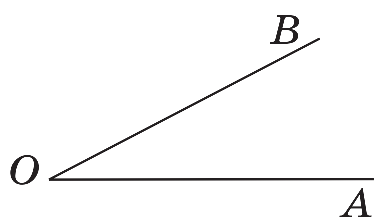
Цікаві задачі – поміркуй одначе

38. Розділіть трикутник двома прямими на:
1) два трикутники й один чотирикутник;
2) два трикутники, один чотирикутник і один п’ятикутник.

§ 3. Кут. Вимірювання кутів. Бісектриса кута

Кут

Кут **– це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.**
Промені називають *сторонами кута*, а їхній спільний початок – *вершиною кута*.



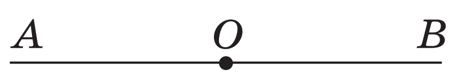
O **– вершина кута, *OA* і *OB* – сторони кута.**

Називають: кут *O*, або кут *AOB*, або кут *BOA* (букву *O*, що позначає його вершину, ставлять посередині).

Записують: $\angle O$, або $\angle AOB$, або $\angle BOA$.

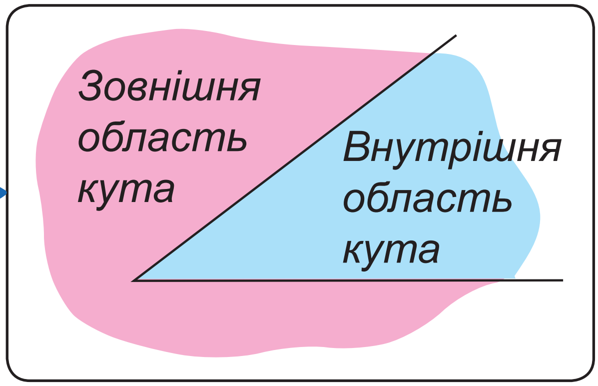
Розгорнутий кут – це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 3.1).

Будь-який кут ділить площину на дві частини.

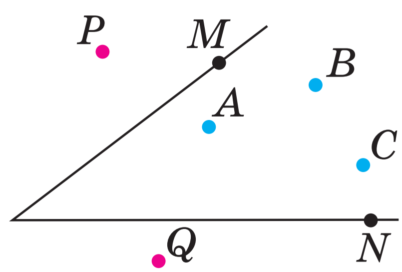


Мал. 3.1

Якщо кут не розгорнутий, то одну із частин називають *внутрішньою областю* кута, а іншу – *зовнішньою*.



На малюнку 3.2 точки *A*, *B* і *C* належать внутрішній області кута (лежать усередині кута), точки *M* і *N* належать сторонам кута, а точки *P* і *Q* належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим, то будь-яку з двох частин, на які він ділить площину, можна вважати внутрішньою областю кута.

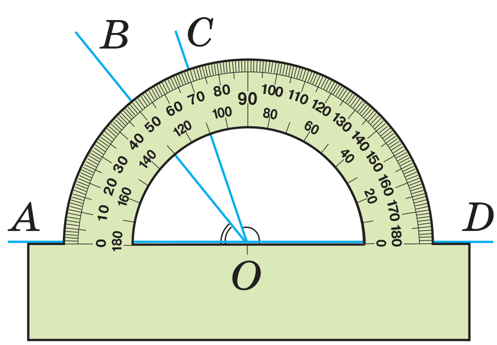


Мал. 3.2

Вимірювання кутів

За одиницю вимірювання кутів приймають ***градус*** – кут, який становить $\frac{1}{180}$ від розгорнутого кута. Позначають градус знаком °. Для вимірювання кутів використовують *транспортир* – інструмент, який ви знаєте з молодших класів.

На малюнку 3.3 градусна міра кута *AOB* дорівнює 50°, а кута *COD* – 110°. Коротко кажуть: кут *AOB* дорівнює 50°, кут *COD* дорівнює 110°; записують так: $\angle AOB = 50°$, $\angle COD = 110°$.



Мал. 3.3

Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах.

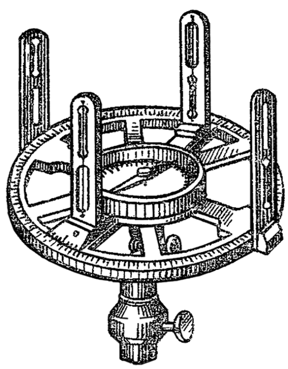
Мінута – це $\dfrac{1}{60}$ частина градуса, позначають знаком $'$.

Секунда – $\dfrac{1}{60}$ частина мінути, позначають знаком $''$.

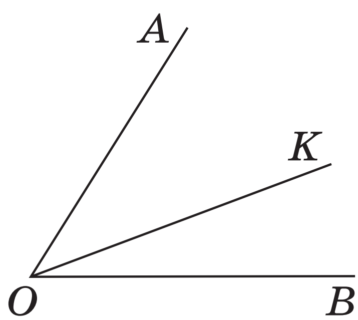
Отже, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 3.4).

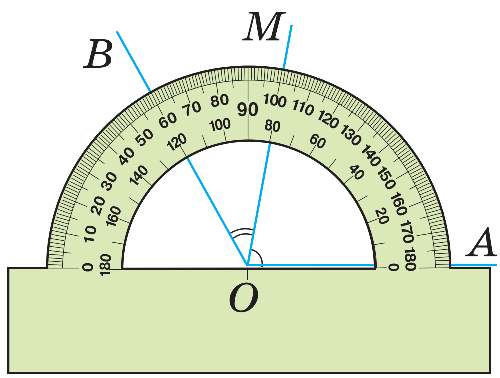
Будемо вважати, що промінь *OK* ***проходить між сторонами кута AOB***, якщо він виходить з його вершини і лежить у його внутрішній області (мал. 3.5).



Мал. 3.4



Мал. 3.5



Мал. 3.6

На малюнку 3.6 промінь *OM* проходить між сторонами кута *AOB* і ділить його на два кути: *BOM* і *MOA*. Бачимо, що $\angle BOM = 40^\circ$, $\angle MOA = 80^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$. Отже, $\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA$.

Маємо *основну властивість вимірювання кутів*.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Приклад 1. Промінь *OK* ділить кут *AOB* на два кути (мал. 3.5). Знайти градусну міру кута *AOK*, якщо $\angle AOB = 75°$, а кут *KOB* складає 40 % від кута *AOB*.

Розв'язання. 1) $\angle KOB = 0{,}4 \cdot \angle AOB = 0{,}4 \cdot 75° = 30°$.

2) $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = 75° - 30° = 45°$.

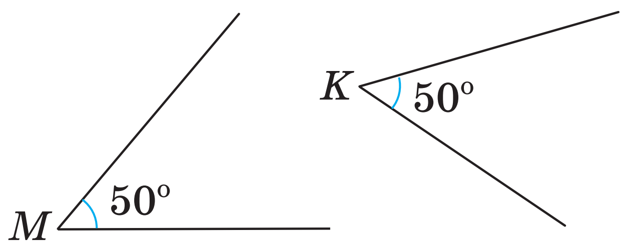
Відповідь: 45°.

Порівняння кутів

З'ясуємо, як порівнювати кути.

Два кути називають *рівними між собою*, якщо в них однакові градусні міри.

З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого є більшою.



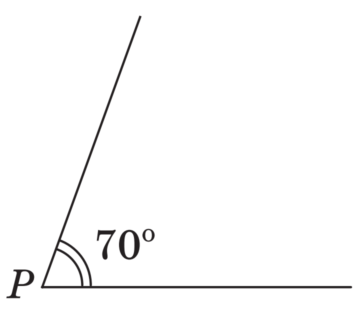
$\angle M = 50°$, $\angle K = 50°$

Ці кути рівні між собою, тому $\angle M = \angle K$. На малюнку такі кути позначають однаковою кількістю дужок при вершині, а якщо кути не є рівними між собою, – різною кількістю дужок.

На малюнку 3.7 градусна міра кута *P* дорівнює 70°, тому кут *P* більший за кут *M*. Записують це так: $\angle P > \angle M$.

Очевидно, що

! якщо два кути рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох кутів рівні, то й самі кути рівні.



Мал. 3.7

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 27 09.07.2024 12:44:16

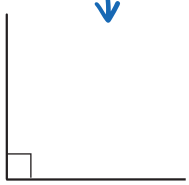
Види кутів

Крім розгорнутого кута, є й інші види кутів.

Якщо градусна міра кута дорівнює 90°, то такий кут називають *прямим*.

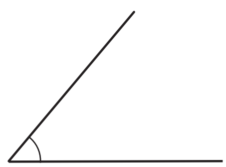
Якщо градусна міра кута менша від прямого кута (від 90°), то такий кут називають *гострим*.

Якщо градусна міра кута більша за прямий (за 90°) і менша від розгорнутого, то такий кут називають *тупим*.

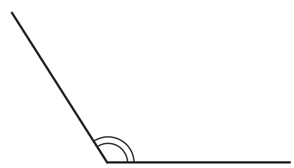


Прямий

такий кут позначають знаком ⌐



Гострий

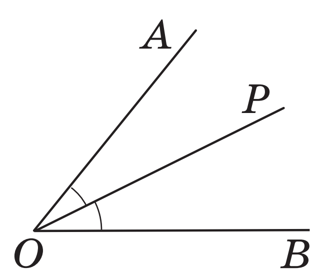


Тупий

Бісектриса кута

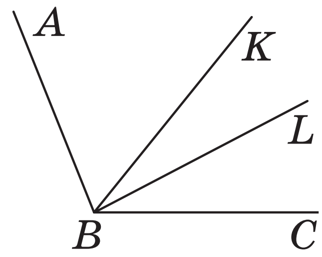
Бісектрисою кута **називають промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.**

На малюнку 3.8 промінь *OP* – бісектриса кута *AOB*.



Мал. 3.8

Приклад 2. $\angle ABC = 100°$, BK – бісектриса кута ABC, а BL – бісектриса кута KBC. Знайти $\angle ABL$.



Розв'язання. Розглянемо малюнок.

1) $\angle KBC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$.

2) $\angle LBC = \dfrac{\angle KBC}{2} = \dfrac{50°}{2} = 25°$.

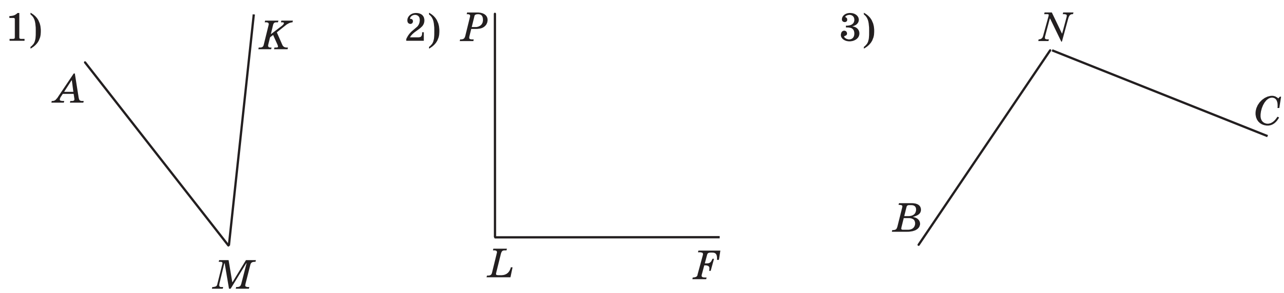
3) $\angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 100° - 25° = 75°$.

Відповідь: 75°.

? Яку фігуру називають кутом? ● Як позначають кут? ● Що таке вершина кута; сторона кута? ● Який кут називають розгорнутим? ● Якими інструментами вимірюють кути? ● У яких одиницях вимірюють кути? ● Що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута»? ● Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. ● Які кути називають рівними? ● Який кут називають прямим; гострим; тупим? ● Який промінь називають бісектрисою кута?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **39**. Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 3.9.



Мал. 3.9

40. Запишіть вершину і сторони кута:

1) MOP;

2) BLK.

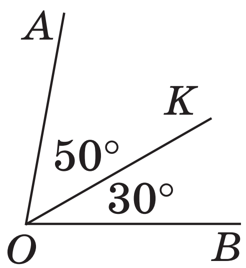
41. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 39°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 91°$;
4) $\angle D = 170°$; 5) $\angle M = 180°$; 6) $\angle Q = 79°$;
7) $\angle P = 1°3'$; 8) $\angle F = 173°12'$; 9) $\angle K = 89°30'$?

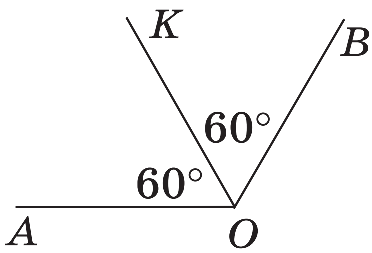
42. Випишіть, які з наведених кутів гострі, тупі, прямі, розгорнуті:

1) $\angle K = 121°$; 2) $\angle A = 90°$; 3) $\angle L = 12°$;
4) $\angle E = 180°$; 5) $\angle M = 89°$; 6) $\angle N = 93°12'$.

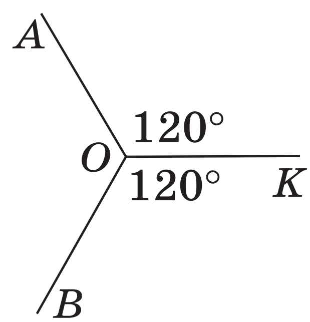
43. (*Усно.*) Чи є промінь *OK* бісектрисою кута *AOB* (мал. 3.10–3.12)?



Мал. 3.10

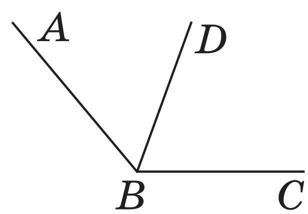


Мал. 3.11



Мал. 3.12

2 **44.** За малюнком 3.13:
1) запишіть усі зображені кути;
2) користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох з них;
3) обчисліть градусну міру третього кута.



Мал. 3.13

45. Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 3.9. Визначте вид кожного з них.

46. Накресліть кут градусної міри:

1) 30°; 2) 90°; 3) 115°; 4) 75°.

47. Накресліть кут, градусна міра якого:

1) 65°; 2) 100°; 3) 20°; 4) 155°.

48. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 140°, і проведіть його бісектрису.

49. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 50°, і проведіть його бісектрису.

50. Виконайте дії: 1) $7°13' + 12°49'$; 2) $52°17' - 45°27'$.

51. Виразіть: 1) у мінутах: 4°; 2°15′;
2) у секундах: 5′; 2°; 1°3′.

52. Промінь *OK* проходить між сторонами кута *BOC*. Знайдіть градусну міру кута *BOC*, якщо $\angle BOK = 38°$, $\angle KOC = 42°$. Виконайте малюнок.

53. Промінь *PC* проходить між сторонами кута *APB*. Знайдіть градусну міру кута *CPB*, якщо $\angle APB = 108°$, $\angle APC = 68°$. Виконайте малюнок.

3 **54.** Чи проходить промінь *BK* між сторонами кута *ABC*, якщо $\angle ABC = 52°$, $\angle ABK = 57°$? Відповідь обґрунтуйте.

55. Знайдіть градусні міри кутів між годинною та хвилинною стрілками годинника:
1) о 18 год; 2) о 3 год; 3) о 1 год; 4) о 20 год.

56. Знайдіть градусну міру кута між годинною та хвилинною стрілками годинника:
1) о 21 год; 2) о 6 год; 3) о 19 год; 4) о 2 год.

57. Промінь *OC* ділить кут *AOB* на два кути. Знайдіть градусну міру кута *BOC*, якщо $\angle AOB = 60°$ і $\angle AOC = \frac{2}{3} \angle AOB$.

58. Промінь *AB* ділить кут *MAK* на два кути. Знайдіть градусну міру кута *MAK*, якщо $\angle MAB = 70°$, а кут *BAK* становить 60 % від кута *MAB*.

4 **59.** Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін за вершину кута дорівнює 142°. Знайдіть градусну міру цього кута.

60. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

61. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище.

$\angle MQB = 120°$. Між сторонами кута проходить промінь QP. Знайдіть кути PQB і MQP, якщо:	$\angle PQB$	$\angle MQP$
кут PQB у 4 рази менший від кута MQP	У	К
$\angle PQB : \angle MQP = 3 : 2$	Р	Ч
кут PQB на 20° більший за кут MQP	А	В

96°	72°	70°	50°	48°	24°	96°

2) Яких відомих українців із цим прізвищем ви знаєте? Інтернет допоможе дізнатися про тих, кого не пригадали.

62. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву столиці європейської держави.

Промінь AC проходить між сторонами кута MAN, який дорівнює 84°. Знайдіть кути MAC і CAN, якщо:	$\angle MAC$	$\angle CAN$
кут MAC більший за кут CAN на 14°	Р	А
кут MAC менший від кута CAN у 3 рази	В	Ш

21°	35°	49°	63°	35°	21°	35°

2) Дізнайтеся про відстань від Києва до цієї столиці та складіть задачу, пов'язану із зазначеною відстанню.

63. Розгорнутий $\angle AOB$ променями OK і OL поділено на три кути так, що $\angle AOK = 140°$, $\angle BOL = 100°$. Знайдіть градусну міру кута LOK.

64. Прямий $\angle COD$ променями OM і ON поділено на три кути так, що $\angle CON = 70°$, $\angle MOD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута MON.

Життєва математика

65. Фермерська родина Нечипоруків посіяла огірки в теплиці 28 м 50 см завдовжки і 16 м завширшки.

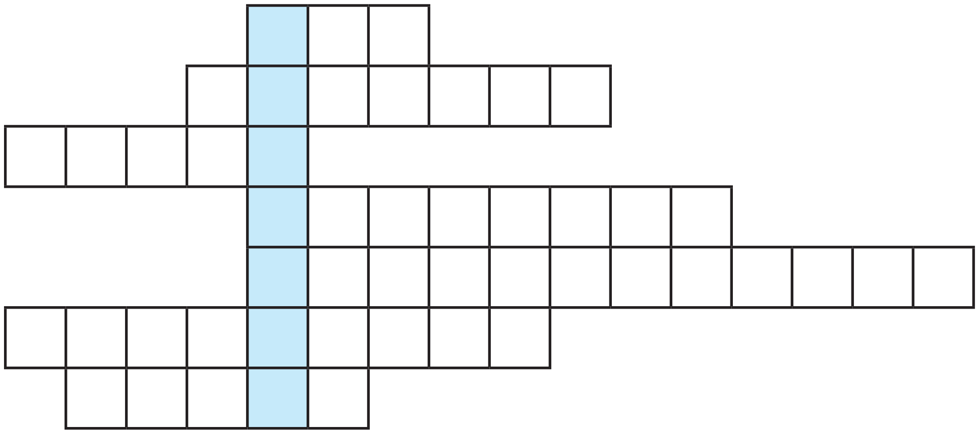
1) Скільки кілограмів огірків збере родина з теплиці, якщо з 1 м^2 збирають 30 кг огірків?

2) Який виторг отримають фермери, якщо продадуть огірки під час весняного сезонного підвищення цін на овочі за ціною 18 грн за кілограм?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

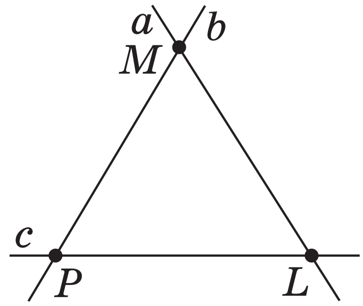
66. 1) Пригадайте назви геометричних фігур, які ви розглянули в цьому розділі, і фігур, які ви знаєте з попередніх класів. Запишіть їхні назви в рядках. Якщо назви фігур записано правильно, то у виділеному стовпчику можна прочитати прізвище видатного українського математика.

2) Знайдіть у літературі чи інтернеті відомості про життєвий і творчий шлях цього математика. Інформацію про цього вченого можна знайти також і на сторінках підручника.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1



1 **67**. За малюнком укажіть:
1) точку перетину прямих *a* і *b*;
2) які точки належать прямій *c*;
3) чи належить точка *M* прямій *PL*;
4) як інакше можна назвати пряму *b*.

2 **68**. 1) Побудуйте промені *OK*, *OM* і *ON* так, щоб промінь *OM* був доповняльним для променя *ON*.
2) Побудуйте промені *OA*, *OB* і *OC* так, щоб серед побудованих променів не було жодної пари доповняльних.

3 **69**. Позначте точки *A*, *B* і *C* так, щоб записи *AB* і *AC* означали дві різні прямі.

70. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку *M*, яка належить іншій прямій. Що можна сказати про точку *M* і точку перетину цих прямих?

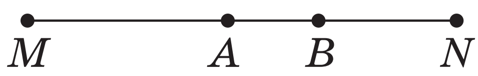
4 **71**. Точки *A* і *B* належать прямій *l*. Пряма *m* відмінна від прямої *l* і проходить через точку *A*. Чи може точка *B* належати прямій *m*? Відповідь обґрунтуйте.

До § 2

1 **72**. 1) Позначте в зошиті точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.
2) Позначте в зошиті точки *D*, *E* і *F*, які лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.

2 **73**. Накресліть відрізок $KL = 6$ см 8 мм. Позначте на ньому точку *P* так, що $KP = 43$ мм. Знайдіть довжину відрізка *LP* за допомогою обчислень.

74. Сумою яких двох відрізків є відрізок *MN* (див. мал.)? Розгляньте всі можливі випадки.



75. 1) Три прямі перетинають відрізок *AB*, причому жодна з точок перетину прямих і відрізка не збігається з кінцями відрізка. На скільки частин ці точки можуть поділити відрізок?

2) На скільки частин поділиться відрізок, якщо кількість прямих дорівнює *n*?

76. Точка *C* – середина відрізка *AB*, точка *D* – середина відрізка *AC*. Знайдіть:

1) *AC*, *CB*, *AD* і *DB*, якщо *AB* = 20 см;

2) *AB*, *AC*, *AD* і *DB*, якщо *BC* = 12 дм.

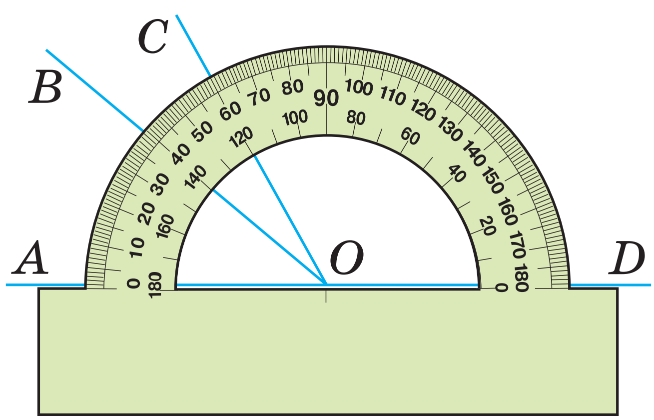
77. Точки *M* і *N* належать відрізку *CD*, *CD* = 15 см, *CM* = 12 см, *DN* = 11 см. Знайдіть довжину відрізка *NM*.

78. Точка *P* належить відрізку *AB*. На прямій *AB* позначте таку точку *C*, щоб $BC = \frac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

79. Точка *K* належить відрізку *CD*, довжина якого *a* см. Знайдіть відстань між серединами відрізків *CK* і *KD*.

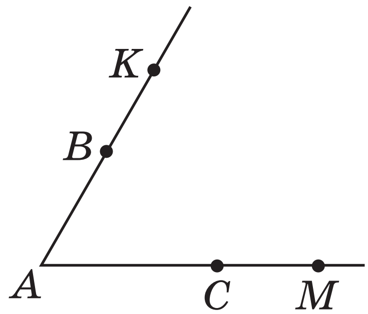
До § 3

80. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку.



81. Два учні накреслили кути по 70°. Один з учнів сказав, що в нього кут більший, оскільки сторони його кута мають більшу довжину. Чи правий цей учень?

2 **82**. Використовуючи малюнок, укажіть усі можливі назви кута з вершиною *A* з даних: *KAC*, *BAM*, *CAM*, *KMA*, *BAC*, *AKM*, *ABC*, *MAK*, *KAM*, *CAK*.



83. Накресліть один гострий кут і один тупий. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

3 **84**. 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?

2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 6 хв; 40 хв?

85. *OK* – бісектриса кута *AOB*, *OL* – бісектриса кута *KOB*. Знайдіть:

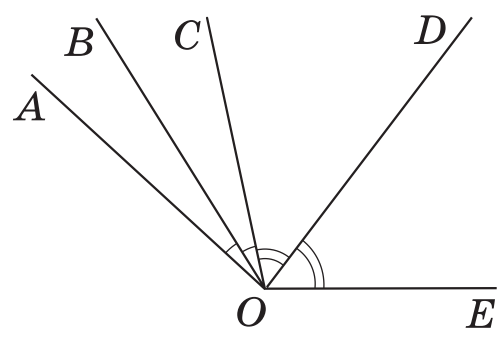
1) $\angle LOK$, якщо $\angle AOB = 120°$;

2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37°$.

4 **86**. $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (див. мал.). Знайдіть:

1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140°$;

2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73°$.



87. $\angle AOB = 168°$, промінь *OM* проходить між його сторонами. $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть ці кути.

Головне в розділі 1

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ

✓ Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

✓ Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

✓ З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

✓ ***Відрізок*** – частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки – ***кінці відрізка*.**

✓ Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

✓ Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

✓ Два відрізки ***рівні між собою***, якщо рівні їхні довжини.

✓ ***Кут*** – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.

✓ Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

✓ Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

✓ Два кути ***рівні між собою***, якщо в них однакові градусні міри.

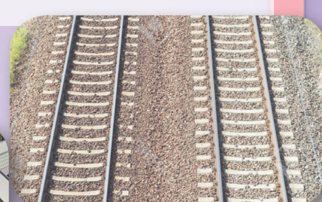
✓ ***Бісектриса кута*** – промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.

Розділ 2

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** паралельні та перпендикулярні прямі;
- **дізнаєтеся**, що таке аксіома, теорема, означення, ознака, наслідок; суміжні та вертикальні кути; кут між двома прямими; кути, що утворилися при перетині двох прямих січною;
- **навчитеся** зображувати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою косинця та лінійки; застосовувати властивості суміжних і вертикальних кутів та кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, до розв'язування задач; доводити теореми.



Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[СлЗ]_(028-24)_V1.indd 38 09.07.2024 12:44:22

§ 4. Аксіоми, теореми, означення

Аксіоми

Аксіоми геометрії – це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення. У перекладі з грецької слово *аксіома* означає *прийняте положення*.

Нагадаємо деякі аксіоми, які ви знаєте.

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює $180°$.

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Теореми

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають ***теоремою***, а саме міркування називають *доведенням теореми*.

Кожна теорема має ***умову*** (те, що дано) і ***висновок*** (те, що потрібно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок – після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Жодні інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Означення

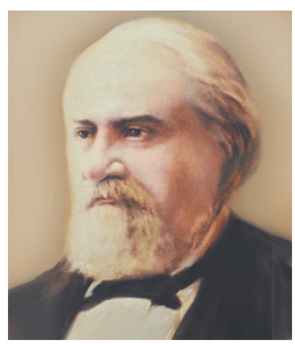
Твердження, у якому пояснюється зміст певного поняття (термін), називають ***означенням***. Ви вже знаєте деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

А ще раніше...

Евклід
(III ст. до н. е.)

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав та узагальнив багаторічний науковий досвід. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на їх основі за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і досі, формулюючи деякі з аксіом Евкліда в більш сучасному вигляді.

«Начала» згодом було перекладено на більшість європейських мов. У 1880 р. видатний український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко опублікував переклад «Начал», додавши пояснення інших питань геометрії.



М. Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)

Саму науку, викладену в «Началах», називають *евклідовою геометрією*.

Значний внесок у розвиток геометрії зробили й інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) та *Аполлоній* (III ст. до н. е.).

Аналіз системи аксіом, які запропонував Евклід, тривав не одне століття. Його на межі XIX і XX ст. завершив видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Він створив повну і несуперечливу систему аксіом геометрії Евкліда.

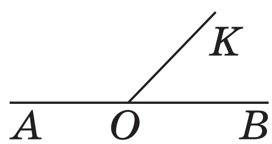
? Що таке аксіома? • Наведіть приклади аксіом. • Що таке теорема; доведення теореми? • Що таке означення?

§ 5. Суміжні кути

Суміжні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 5.1 кути *AOK* і *KOB* – суміжні, сторона *OK* у них – спільна, а *OA* і *OB* є доповняльними променями.



Мал. 5.1

Властивості суміжних кутів

Т Теорема (властивість суміжних кутів).
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Доведення. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні (мал. 5.1). Оскільки промені *OA* і *OB* утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180°$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°. Теорему доведено. ■

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають ***наслідками***. Розглянемо наслідки з доведеної теореми.

Наслідок 1. **Кут, суміжний з прямим кутом, – прямий.**
Наслідок 2. **Кут, суміжний з гострим кутом, – тупий; кут, суміжний з тупим кутом, – гострий.**
Наслідок 3. **Кути, суміжні до рівних кутів, є рівними.**

Приклад. Знайти градусну міру кожного із суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за інший.

Розв'язання. Для зручності записів позначимо менший з даних кутів – $\angle 1$, а більший – $\angle 2$.

1) Нехай $\angle 1 = x^\circ$, тоді $\angle 2 = x^\circ + 56^\circ$.

2) Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (за властивістю суміжних кутів), маємо рівняння: $x + x + 56 = 180$, звідки $x = 62^\circ$.

3) Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62°, а інший – $62^\circ + 56^\circ = 118^\circ$.

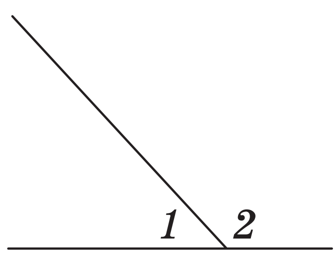
Відповідь: 62°; 118°.

Які кути називають суміжними? Сформулюйте та доведіть теорему про властивість суміжних кутів.

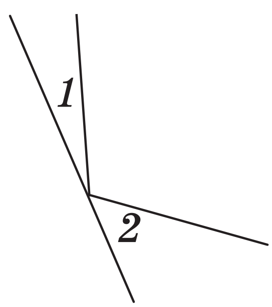
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

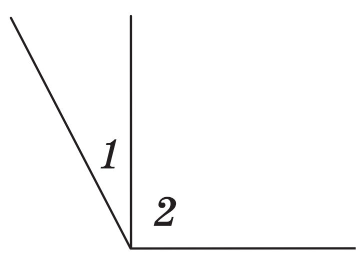
88. (*Усно*.) На яких з малюнків 5.2–5.5 кути *1* і *2* є суміжними?



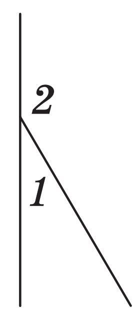
Мал. 5.2



Мал. 5.3



Мал. 5.4



Мал. 5.5

89. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:

1) 42° і 148°; 2) 90° і 90°;
3) 166° і 14°; 4) 23° і 156°?

90. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) 13° і 167°; 2) 5° і 165°;
3) 11° і 179°; 4) 91° і 89°?

91. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 15°; 2) 113°.

92. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 127°; 2) 39°.

2 **93.** Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що ON – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

94. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що PA – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

95. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють 15° і 72°. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

96. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює 36°. Знайдіть градусну міру кута, який суміжний з кутом M.

97. Накресліть два суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною, а градусні міри – неоднаковими.

98. Накресліть два суміжних кути різної градусної міри так, щоб їхня спільна сторона була горизонтальною.

99. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть це твердження.

100. Кути, суміжні до кутів A і B, рівні між собою. Доведіть, що $\angle A = \angle B$.

101. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) на 18° менший від іншого;
2) становить $\frac{3}{7}$ від іншого.

102. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) утричі більший за інший;
2) становить 25 % від іншого.

103. Дано гострий кут *M* і тупий кут *N*, градусні міри яких відносяться як 2 : 5. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 140°.

104. Дано тупий кут *A* і гострий кут *B*, градусні міри яких відносяться як 4 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 80°.

105. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

106. Два кути відносяться як 1 : 2, а суміжні з ними – як 7 : 5. Знайдіть ці кути.

107. Один з двох даних кутів на 20° більший за інший, а суміжні з ними – відносяться як 5 : 6. Знайдіть дані кути.

108. Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.

Вправи для повторення

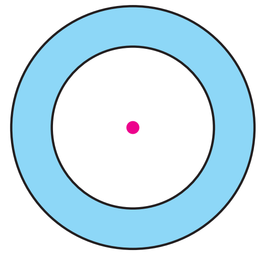
109. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 27°; 2) 119°.

110. Точки *A*, *B* і *C* лежать на одній прямій, *AB* = 2,7 см, *BC* = 3,6 см. Чи може відстань між точками *A* і *C* дорівнювати:
1) 0,8 см; 2) 0,9 см; 3) 1 см;
4) 6,1 см; 5) 6,3 см; 6) 6,5 см?

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 44 09.07.2024 12:44:24

Життєва математика

111. Будівельникам для встановлення башти потрібно залити фундамент у формі кільця. Радіус зовнішнього кола цього фундаменту має дорівнювати 15 м, а внутрішнього – 10 м. Визначте площу земельної ділянки під фундаментом башти.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

112. **Анаграми**. У цій задачі потрібно розшифрувати кожний запис, переставивши букви в ньому так, щоб отримати відоме слово. Такі перестановки називають *анаграмами*. Наприклад, розв’язати анаграму ВДАКТАР – означає знайти слово, складене із цих букв, – це КВАДРАТ.

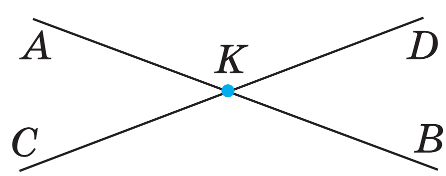
Розв’яжіть анаграми:

1) ТУК; 2) АРЯМП; 3) КЛЕІВД; 4) МОРТЕІЯГЕ.

§ 6. Вертикальні кути. Кут між двома прямими, що перетинаються

Вертикальні кути

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.

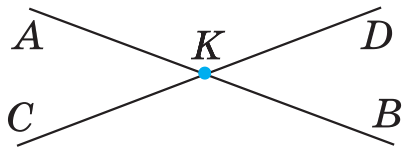


Прямі *AB* і *CD* перетинаються в точці *K*.

Утворилися дві пари вертикальних кутів:
$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні;
$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні.

Т Теорема (властивість вертикальних кутів).
Вертикальні кути рівні між собою.

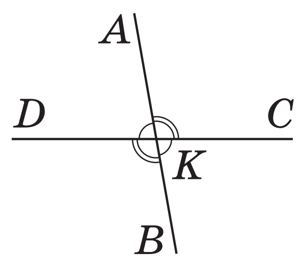
Доведення. Нехай кути AKC і DKB – вертикальні (див. мал.).



1) Оскільки кути AKC і AKD суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180^\circ$.
2) Також суміжні кути AKD і DKB, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180^\circ$.
3) Маємо:
$\angle AKC = 180^\circ - \angle AKD$ і $\angle DKB = 180^\circ - \angle AKD$.

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є і ліві їхні частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено. ■

Приклад. Два із чотирьох нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.



Розв'язання. Кожні два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, є або суміжними, або вертикальними (див. мал.). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то в задачі йдеться про суміжні кути. Наприклад, $\angle AKD$ і $\angle AKC$.

1) За умовою $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, тому можемо ввести позначення: $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$.

2) Оскільки $\angle AKD + \angle AKC = 180^\circ$, маємо рівняння: $4x + 5x = 180^\circ$, звідки $x = 20^\circ$.

3) Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$, $\angle AKC = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$. Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80^\circ$, $\angle BKD = \angle AKC = 100^\circ$.

Відповідь: 80°, 100°, 80°, 100°.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[СлЗ]_(028-24)_V1.indd 46 09.07.2024 12:44:25

Кут між прямими

***Кутом між прямими, що перетинаються*, називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

Кут між прямими *AB* і *DC* з попередньої задачі дорівнює 80°.

! Кут між прямими, що перетинаються, не може перевищувати 90°.

? Які кути називають вертикальними? • Яку властивість мають вертикальні кути? • Який кут називають кутом між двома прямими?

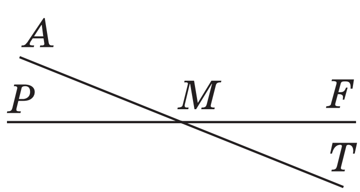
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

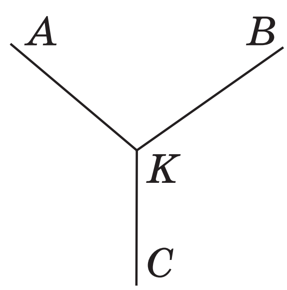
113. (*Усно*.) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 6.1.

114. (*Усно*.) Чи є на малюнку 6.2 вертикальні кути?

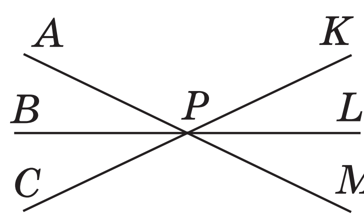
115. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15°; 2) 129°. Знайдіть другий кут.



Мал. 6.1



Мал. 6.2



Мал. 6.3

116. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42°; 2) 139°. Знайдіть другий кут.

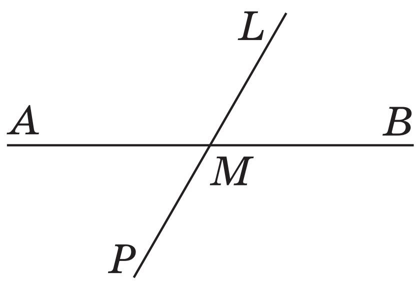
2

117. На малюнку 6.3 прямі *AM*, *BL* і *CK* перетинаються в точці *P*. Знайдіть усі пари вертикальних кутів.

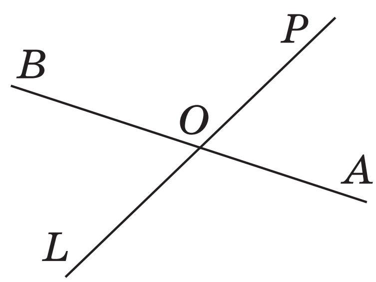
118. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.

119. На малюнку 6.4 $\angle AML = 120°$. Знайдіть $\angle AMP$, $\angle PMB$ і $\angle BML$.

120. (*Усно.*) Учениця накреслила дві прямі, що перетинаються, та, вимірявши транспортиром один з кутів, які при цьому утворилися, отримала 130°. Чи може вона стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130°? Відповідь поясніть.



Мал. 6.4



Мал. 6.5

121. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 6.5). $\angle POB = 118°$. Знайдіть кут між прямими AB і PL.

122. Накресліть дві прямі, що перетинаються, та знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

123. Накресліть $\angle MON$, що дорівнює 110°. Побудуйте доповняльні промені OL і OK до його сторін OM і ON відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

124. Накресліть $\angle AOB$, що дорівнює 30°. Побудуйте доповняльні промені OP і OD до його сторін OA і OB відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

125. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) усі кути рівні між собою;
2) сума двох з них дорівнює 178°.

126. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 16°;
2) три із чотирьох кутів рівні між собою.

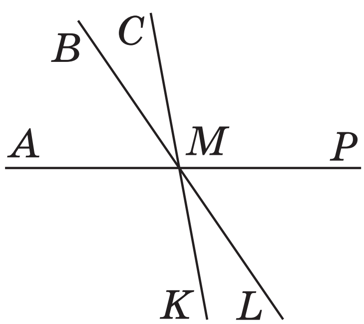
3 **127.** Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18°;
2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293°;
3) один із кутів становить $\frac{4}{5}$ від іншого.

128. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) один з кутів, що утворилися, удвічі менший від іншого;
2) один з кутів становить 20 % від іншого.

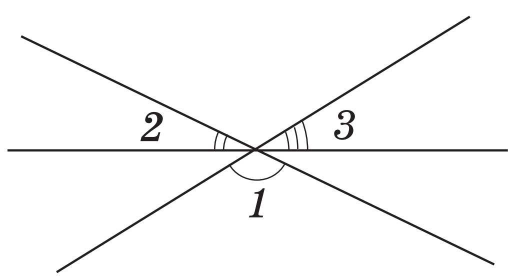
4 **129.** Прямі *AP*, *BL* і *CK* перетинаються в точці *M* (мал. 6.6), $\angle BMC = 20°$, $\angle LMP = 60°$. Знайдіть $\angle AMK$.

130. Прямі *AP*, *BL* і *CK* перетинаються в точці *M* (мал. 6.6), $\angle CMP = 105°$, $\angle KML = 25°$. Знайдіть $\angle AMB$.

131. На малюнку 6.7 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів *1*, *2* і *3*.



Мал. 6.6



Мал. 6.7

* **132.** Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 49 09.07.2024 12:44:26

Вправи для повторення

133. На прямій послідовно позначено 10 точок так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між двома крайніми точками.

134. Відомо, що $\angle ABC = 70°$, а $\angle CBD = 20°$. Чи може градусна міра кута ABD дорівнювати:

1) 40°; 2) 50°; 3) 60°;
4) 80°; 5) 90°; 6) 100°?

Життєва математика

135. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої 14 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо в кімнаті три вікна розміром $2 \times 1{,}8$ м?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

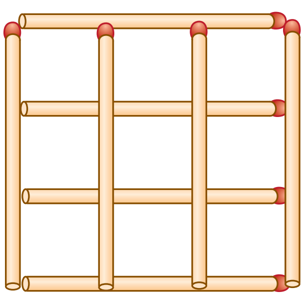
136. Накресліть прямокутник $ABCD$ та запишіть усі пари перпендикулярних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

137. Фігуру на малюнку складено з восьми сірників.

1) Скільки квадратів при цьому утворилося?

2) Як прибрати два сірники так, щоб залишилося лише три квадрати?

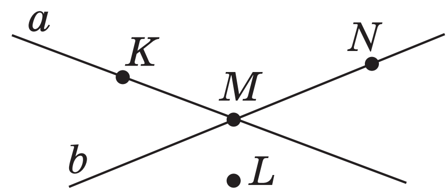


ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–6)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Яка з точок на малюнку належить і прямій a, і прямій b?



А. K **Б.** L
В. M **Г.** N

2. Який із запропонованих кутів є тупим?

А. $\angle M = 129°$ **Б.** $\angle T = 90°$ **В.** $\angle N = 180°$ **Г.** $\angle L = 78°$

3. Пара суміжних кутів може дорівнювати...

А. 18° і 172° **Б.** 27° і 153° **В.** 25° і 145° **Г.** 47° і 134°

2

4. Промінь OP проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть градусну міру кута AOB, якщо $\angle AOP = 20°$, $\angle POB = 50°$.

А. 30° **Б.** 70°
В. 110° **Г.** неможливо визначити

5. Точка L належить відрізку AB. Знайдіть AL, якщо $LB = 5$ см, $AB = 8$ см.

А. 13 см **Б.** 9 см **В.** 4 см **Г.** 3 см

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 160°. Знайдіть кут між прямими.

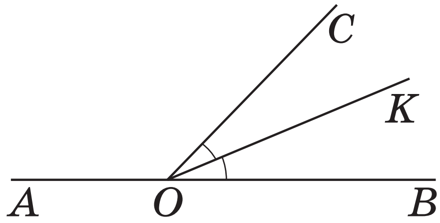
А. 160° **Б.** 100° **В.** 80° **Г.** 20°

3

7. Відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Укажіть взаємне розміщення точок A, B і C.

А. точка A лежить між точками B і C
Б. точка B лежить між точками A і C
В. точка C лежить між точками B і A
Г. жодна з точок не лежить між двома іншими

8. Промінь OK є бісектрисою кута COB, $\angle COB = 70°$ (див. мал.). Знайдіть $\angle AOK$.



А. 110° **Б.** 135°
В. 145° **Г.** 155°

9. Один із суміжних кутів удвічі менший від другого. Знайдіть більший із цих кутів.

А. 60° **Б.** 80° **В.** 100° **Г.** 120°

4 **10**. На площині позначено п’ять точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих, кожна з яких проходить через деякі дві з даних точок, можна провести?

А. 5 **Б.** 8 **В.** 10 **Г.** 15

11. Розгорнутий $\angle MON$ поділено променями OA і OB на три кути. $\angle MOA = 120°$, $\angle NOB = 110°$. Знайдіть градусну міру кута AOB.

А. 50° **Б.** 60° **В.** 70° **Г.** 80°

12. Дано два кути, градусні міри яких відносяться як 1 : 2. Різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 70°. Знайдіть більший з даних кутів.

А. 70° **Б.** 90° **В.** 110° **Г.** 140°

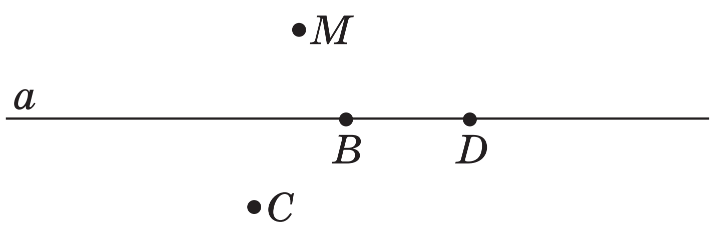
У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13**. На відрізку AB завдовжки 74 см позначено точки M і N (див. мал.). Довжини відрізків AM і MN відносяться як 3 : 2, а відрізок NB на 4 см довший за відрізок MN. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізки		Довжини відрізків	
1.	*AM*	**А.**	20 см
2.	*MN*	**Б.**	24 см
3.	*NB*	**В.**	28 см
		Г.	30 см

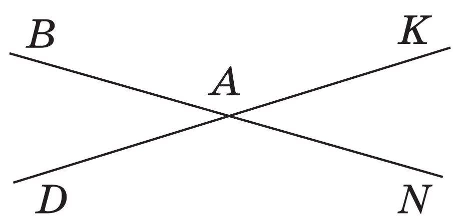
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–6

1 **1**. Назвіть точки, що належать прямій *a*, та точки, що їй не належать (див. мал.). Зробіть відповідні записи.



2. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
1) $\angle A = 92°$; 2) $\angle B = 180°$;
3) $\angle C = 90°$; 4) $\angle D = 31°$?

3. За малюнком назвіть пари вертикальних кутів.



2 **4**. Точка *C* належить відрізку *MN*. Знайдіть довжину відрізка *CM*, якщо $MN = 7{,}2$ см, $CN = 3{,}4$ см.

5. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70°, та проведіть його бісектрису.

6. Прямі *AB* і *CD* перетинаються в точці *O*, $\angle AOC = 132°$. Знайдіть кут між прямими *AB* і *CD*.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 53 09.07.2024 12:44:28

7. Точки M і N належать відрізку AB, довжина якого дорівнює 30 см. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $AM = 20$ см, $BN = 16$ см.

8. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший від другого.

9. Точки A, B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AK = 9{,}3$ см, $KB = 3{,}7$ см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові вправи

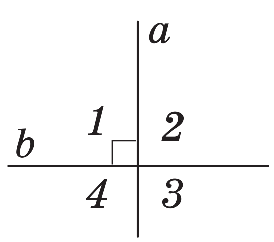
10. Який кут утворює бісектриса кута 48° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

11. Два кути відносяться як $1 : 3$, а суміжні з ними – як $7 : 3$. Знайдіть дані кути.

§ 7. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

Перпендикулярні прямі

Нехай при перетині двох прямих a і b один з кутів, що утворилися, є прямим, наприклад $\angle 1 = 90^\circ$.

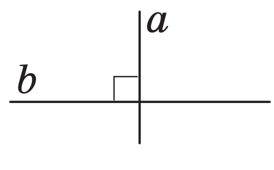


$\angle 1$ і $\angle 3$ – вертикальні
$\angle 1$ і $\angle 2$ – суміжні
$\angle 2$ і $\angle 4$ – вертикальні

$\angle 3 = \angle 1 = 90^\circ$
$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
$\angle 4 = \angle 2 = 90^\circ$

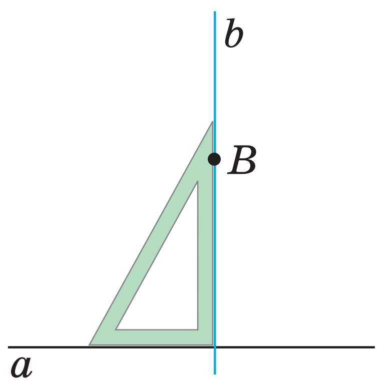
Якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта кутів також прямі. Про такі прямі кажуть, що вони перетинаються під прямим кутом або що вони перпендикулярні.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

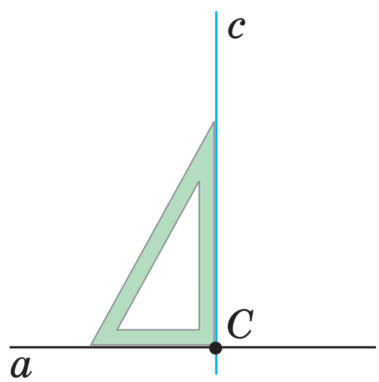


Записують: *a* ⊥ *b*
Читають так:
«Пряма *a* перпендикулярна до прямої *b*».

Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський косинець. На малюнку 7.1 через точку *B*, яка не належить прямій *a*, проведено пряму *b*, перпендикулярну до прямої *a*. На малюнку 7.2 точка *C* належить прямій *a*, і через неї перпендикулярно до прямої *a* проведено пряму *c*. В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої *a*.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

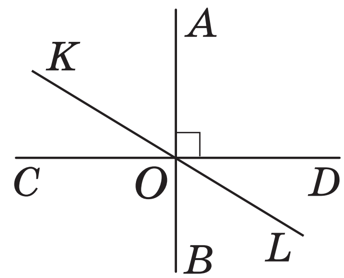
Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 55 09.07.2024 12:44:29

Отже,

! через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

Приклад. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (див. мал.). Знайти $\angle AOK$, якщо $\angle COL = 160°$.

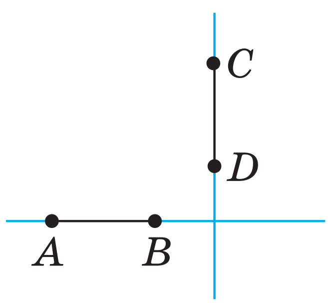
Розв'язання. 1) Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle COB = 90°$.
2) $\angle BOL = \angle COL - \angle COB = 160° - 90° = 70°$.
3) $\angle AOK = \angle BOL$ (як вертикальні), тому $\angle AOK = 70°$.
Відповідь: 70°.



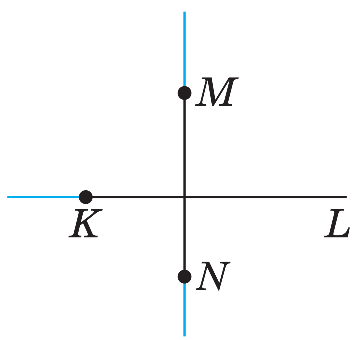
Перпендикулярні відрізки та промені

***Відрізки* або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.**

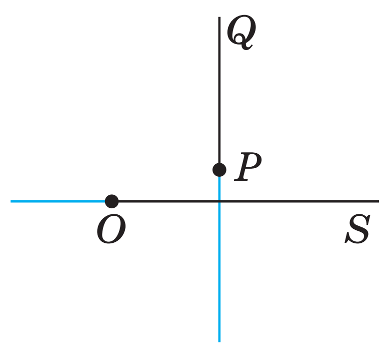
Наприклад, на малюнку 7.3 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD, на малюнку 7.4 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN, а на малюнку 7.5 промінь PQ перпендикулярний до променя OS. Для запису перпендикулярності відрізків і променів також використовують знак $\perp$.



Мал. 7.3



Мал. 7.4



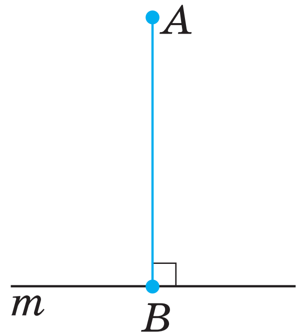
Мал. 7.5

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 56 09.07.2024 12:44:30

Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

***Перпендикуляром до прямої*, проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.**

На малюнку 7.6 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m. Точка B – ***основа перпендикуляра***, а довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої m.

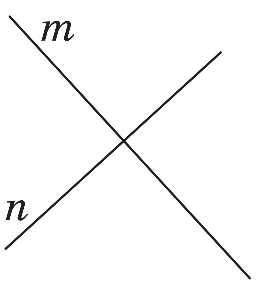


Мал. 7.6

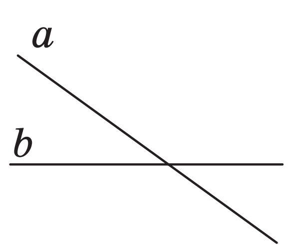
? Які прямі називають перпендикулярними? • Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? • Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки? • Що називають відстанню від точки до прямої?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

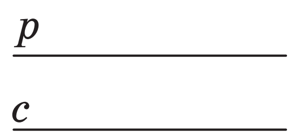
1 **138**. На яких з малюнків 7.7–7.10 зображено перпендикулярні прямі? За потреби використайте косинець. Виконайте відповідні записи.



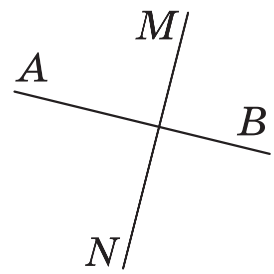
Мал. 7.7



Мал. 7.8



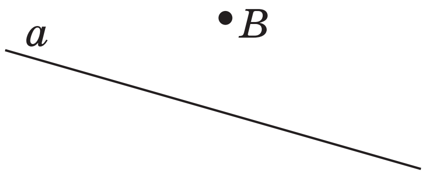
Мал. 7.9



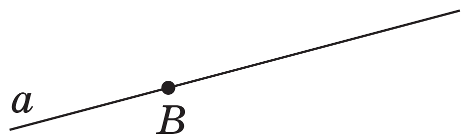
Мал. 7.10

139. Накресліть пряму c та позначте точку A, що їй належить, і точку B, що їй не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб вони були перпендикулярними до прямої c.

140. Відтворіть малюнки 7.11 і 7.12 у зошиті та для кожного випадку за допомогою косинця проведіть пряму b, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a.



Мал. 7.11



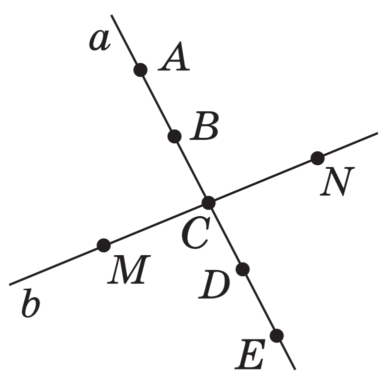
Мал. 7.12

141. На малюнку 7.13 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки AB і MN;
2) промінь EA і відрізок CM;
3) відрізки AB і DE;
4) промені CN і CE?

142. На малюнку 7.13 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки DE і CN;
2) промені CM і CA;
3) промінь CE і відрізок CA;
4) відрізки BD і MN?



Мал. 7.13

2 **143.** Накресліть пряму a, позначте точку A, що розміщена на відстані 2,5 см від прямої a, та точку B, що розміщена на відстані 4 см від прямої a.

144. Проведіть пряму m, позначте точку P, що розміщена на відстані 3 см від прямої m, та точку K, що розміщена на відстані 1,5 см від прямої m.

145. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярними та не перетиналися.

146. Накресліть промені *MN* і *KL* так, щоб вони були перпендикулярними та перетиналися.

147. Прямі *AB*, *KL* і *MN* перетинаються в точці *O* (мал. 7.14). Чи є перпендикулярними прямі *AB* і *MN*, якщо:

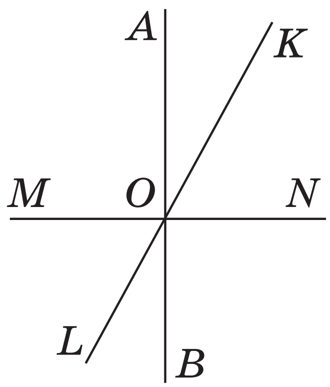
1) $\angle AOK = 25°$, $\angle KON = 66°$;

2) $\angle LON = 118°$, $\angle LOB = 28°$?

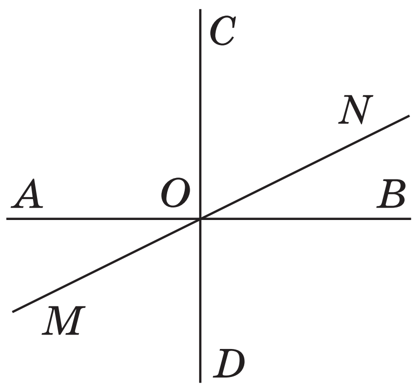
148. Прямі *AB*, *KL* і *MN* перетинаються в точці *O* (мал. 7.14). Чи є перпендикулярними прямі *AB* і *MN*, якщо:

1) $\angle MOK = 122°$, $\angle AOK = 31°$;

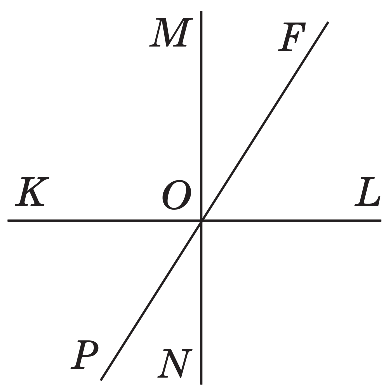
2) $\angle MOL = 59°$, $\angle LOB = 31°$?



Мал. 7.14



Мал. 7.15



Мал. 7.16

3

149. (*Усно.*) Чи є правильним означення: «Перпендикуляр до прямої – це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

150. Прямі *AB*, *CD* і *MN* перетинаються в точці *O*, причому $AB \perp CD$ (мал. 7.15). Знайдіть:

1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25°$;

2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150°$.

151. Прямі *KL*, *MN* і *PF* перетинаються в точці *O*, причому $KL \perp MN$ (мал. 7.16). Знайдіть:

1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140°$;

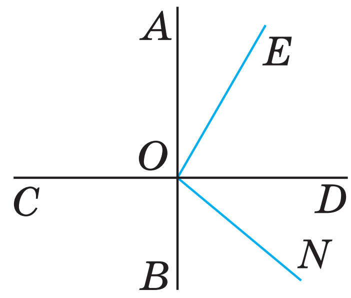
2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37°$.

152. Кути *ABC* і *CBM* прямі. Доведіть, що точки *A*, *B* і *M* лежать на одній прямій.

153. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні між собою. Доведіть, що це перпендикулярні прямі.

154. $AB \perp CD$ (мал. 7.17), $\angle EON = 110°$. Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle AOE = 20°$.

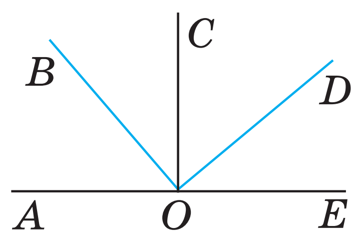
155. $AB \perp CD$ (мал. 7.17), $\angle CON = 135°$, $\angle AOE = 25°$. Знайдіть $\angle EON$.



Мал. 7.17

4

156. На малюнку 7.18 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.



Мал. 7.18

157. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

158. Промені *OK* і *OL* є бісектрисами кутів *AOB* і *BOC* відповідно, причому $OK \perp OL$. Доведіть, що кути *AOB* і *BOC* – суміжні.

Вправи для повторення

159. На прямій послідовно позначено точки *M*, *N* і *K*. Знайдіть:

1) *MK*, якщо *MN* = 3 см 2 мм, *NK* = 4,1 см;

2) *MN*, якщо *MK* = 7,8 см, *NK* = 2 см 5 мм.

160. Знайдіть суміжні кути, різниця яких дорівнює 36°.

Життєва математика

161. Рулон шпалер має 50 см завширшки і 10 м завдовжки. Потрібно обклеїти стіни в кімнаті, довжина якої 4,5 м, ширина – 3 м, а висота – 2,5 м. Загальна площа вікна і дверей становить 3,5 м^2.

1) Скільки рулонів потрібно купити?

2) Скільки коробок клею знадобиться, якщо для того, щоб поклеїти 4 рулони шпалер, витрачається одна коробка?

3) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо рулон шпалер коштує 240 грн, а коробка клею – 85 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

162. Накресліть квадрат *ABCD* та запишіть усі пари паралельних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

163. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а довжина кожної з його сторін є цілим числом сантиметрів. Чи може площа прямокутника дорівнювати:

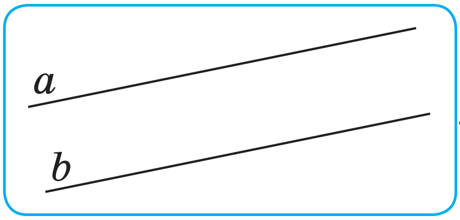
1) 256 см^2; 2) 220 см^2;
3) 64 см^2; 4) 60 см^2;
5) 55 см^2; 6) 54 см^2?

§ 8. Паралельні прямі

Паралельні прямі. Основна властивість паралельних прямих

Дві прямі на площині можуть мати спільну точку (перетинатися) або не мати спільних точок (не перетинатися).

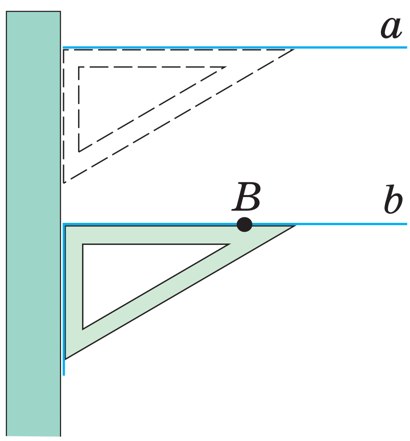
Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.



Записують: *a* || *b*
Читають так: «Пряма *a* паралельна прямій *b*».

Довкола нас є багато прикладів паралельних прямих: прямолінійні ділянки шляху залізниці, горизонтальні чи вертикальні прямі зошита в клітинку, протилежні сторони рами тощо.

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський косинець і лінійку. На малюнку 8.1 показано, як через точку *B*, яка не належить прямій *a*, проведено пряму *b*, паралельну прямій *a*.



Мал. 8.1

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

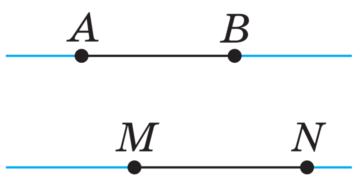
VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих*.

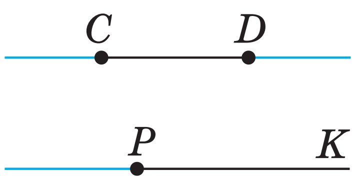
Паралельні відрізки та промені

***Відрізки* або *промені* називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.**

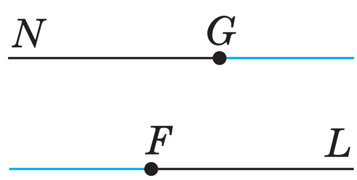
На малюнку 8.2 відрізок AB паралельний відрізку MN, на малюнку 8.3 відрізок CD паралельний променю PK, а на малюнку 8.4 промінь GN паралельний променю FL. Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\parallel$.



Мал. 8.2



Мал. 8.3



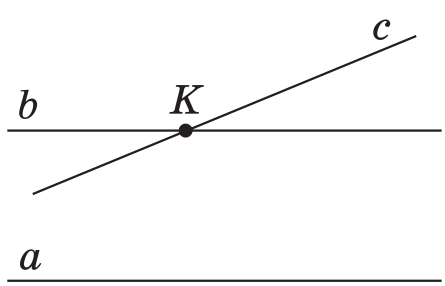
Мал. 8.4

Доведення від супротивного

Ми вже доводили деякі теореми та розв'язували задачі на доведення. Розглянемо задачу, в якій застосуємо ще один важливий спосіб доведення геометричних тверджень.

Приклад. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Доведення. Нехай a і b – паралельні прямі і пряма c перетинає пряму b в точці K (див. мал.).



1) Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тобто $c \parallel a$.

2) Отже, через точку K проходять дві прямі c і b, які обидві паралельні прямій a. Це суперечить аксіомі паралельності прямих.

3) Отже, наше припущення є хибним, значить, правильним є те, що пряма c перетинає пряму a. Твердження доведено. ■

Зауважимо, що спосіб міркування, яким ми довели твердження попередньої задачі, називають *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне, тобто що a і c не перетинаються.

У процесі міркувань, виходячи із цього припущення, ми прийшли до протиріччя з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення було хибним, отже, правильним є протилежне до нього припущення, тобто що пряма *c* перетинає пряму *a*.

Суть доведення від супротивного полягає в тому, що на початку доведення припускається істинність твердження, протилежного тому, що потрібно довести. *Доведення* (міркування) на основі цього припущення приводить до висновку, який суперечить або умові теореми (задачі), або деякому з істинних тверджень (аксіомі, теоремі тощо), а це означатиме, що припущення, протилежне тому, яке потрібно було довести, є хибним. Отже, істинним є те, що вимагалося довести.

А ще раніше...

У «Началах» Евклід деякі з аксіом називав *постулатами*. Так, зокрема, з п'ятого постулату Евкліда, який ще називають *аксіомою паралельності Евкліда*, фактично випливає, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Протягом понад двох тисячоліть учені намагалися довести п'ятий постулат Евкліда. На початку XIX ст. три видатних учених – М. І. Лобачевський, К. Ф. Гаусс (1777–1855) та Я. Больяї (1802–1860) – незалежно один від одного дійшли висновку, що довести п'ятий постулат Евкліда неможливо, він є початковим положенням, а тому є аксіомою.

К.Ф. Гаусс
(1777–1855)

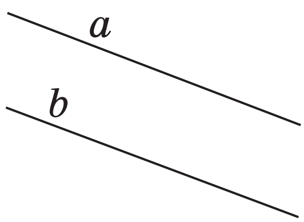
М. І. Лобачевський пішов далі і, замінивши аксіому паралельності на таку: «Через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинають її», – побудував нову геометрію – неевклідову. Її стали називати «геометрією Лобачевського».

Які прямі називають паралельними? • Які інструменти використовують для побудови паралельних прямих? • Сформулюйте аксіому паралельності прямих. • Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

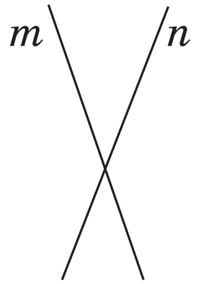
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

164. Запишіть з використанням символів:
1) пряма *a* паралельна прямій *m*;
2) пряма *CD* паралельна прямій *PK*.

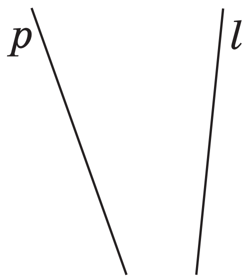
165. На яких з малюнків 8.5–8.8 зображено паралельні прямі?



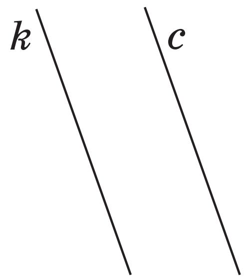
Мал. 8.5



Мал. 8.6



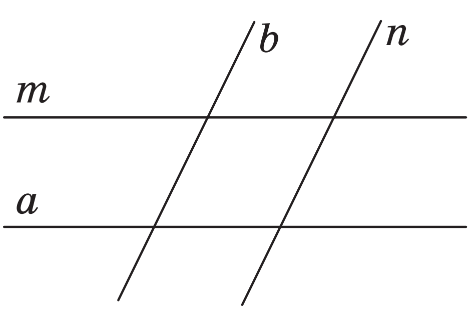
Мал. 8.7



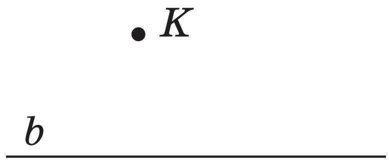
Мал. 8.8

166. Укажіть пари паралельних прямих на малюнку 8.9.

167. 1) Дано пряму *b* і точку *K*, що їй не належить (мал. 8.10). Скільки можна провести через точку *K* прямих, паралельних прямій *b*?
2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій *b*?



Мал. 8.9



Мал. 8.10

2

168. Проведіть пряму l і позначте точку A, що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l.

169. Позначте точку P і проведіть пряму a, що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a.

170. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD.

171. Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB.

3

172. 1) Накресліть $\angle ABC = 120°$ та позначте точку K, що лежить у внутрішній області цього кута.

2) Через точку K за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму m, паралельну променю BA, та пряму n, паралельну променю BC.

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими m і n.

4) Зробіть висновки.

173. 1) Накресліть $\angle MNL$, який дорівнює $50°$, і позначте точку C, що належить внутрішній області цього кута.

2) Через точку C за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму a, паралельну променю NM, і пряму b, паралельну променю NL.

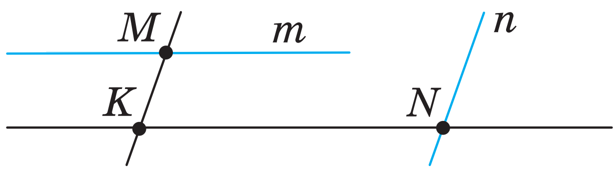
3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими a і b.

4) Зробіть висновки.

174. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a. Доведіть, що прямі m і b перетинаються.

175. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b.

4 **176.** Прямі KM і KN (мал. 8.11) перетинаються. Через точку M проведено пряму m, паралельну прямій KN, а через точку N проведено пряму n, паралельну прямій KM. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 8.11

177. Прямі a і b – паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c.

Вправи для повторення

178. 1) Позначте на прямій m точки A і B та точку C, яка не належить прямій m.

2) Виміряйте відстані AB, AC і BC та порівняйте AB з $AC + BC$.

3) Зробіть висновки.

179. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, становить 25 % від іншого. Знайдіть кут між прямими.

Життєва математика

180. Дитячий майданчик, що має форму прямокутника 6,5 м завдовжки і 3,5 м завширшки, потрібно вкрити плиткою, що має форму квадрата, довжина сторони якого 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо одна плитка коштує 52 грн, а вартість додаткових матеріалів та укладання становить 35 % від вартості плитки?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

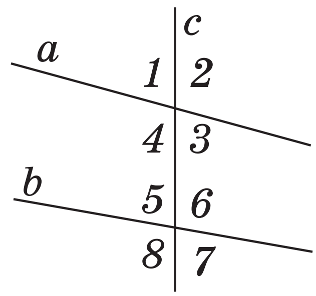
181. Чи можна квадрат, довжина сторони якого дорівнює 2017 клітинок, розрізати на дві рівні фігури так, щоб лінії розрізів проходили по сторонах клітинок?

§ 9. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих

Кути, утворені при перетині прямих січною

Пряму *c* називають ***січною*** для прямих *a* і *b*, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 9.1).

При перетині прямих *a* і *b* січною *c* утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 9.1. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:



Мал. 9.1

внутрішні односторонні кути:
***4* і *5*; *3* і *6*;**
внутрішні різносторонні кути:
***4* і *6*; *3* і *5*;**
відповідні кути:
***1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.**

Приклад 1. На малюнку 9.1 $\angle 2 + \angle 6 = 190°$. Знайти:
1) $\angle 4 + \angle 8$; 2) $\angle 1 + \angle 7$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\angle 4 = \angle 2$ (як вертикальні) і $\angle 8 = \angle 6$ (аналогічно), то $\angle 4 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 6 = 190°$.

2) Кути *1* і *2* – суміжні, тому $\angle 1 = 180° - \angle 2$. Аналогічно $\angle 7 = 180° - \angle 6$. Тоді $\angle 1 + \angle 7 = (180° - \angle 2) + (180° - \angle 6) = 360° - (\angle 2 + \angle 6) = 360° - 190° = 170°$.

Відповідь: 1) 190°; 2) 170°.

Ознака в геометрії

Якщо в задачі потрібно з’ясувати, чи паралельні прямі, то, виходячи з означення, це зробити неможливо, оскільки для цього прямі потрібно продовжити до нескінченності. Проте встановити, прямі паралельні чи ні, можна, використавши спеціальні теореми, які називають ознаками.

Ознака (у геометрії) – це теорема, яка вказує умови, виконання яких дає змогу стверджувати про певні властивості фігур, належність їх до певного класу тощо.

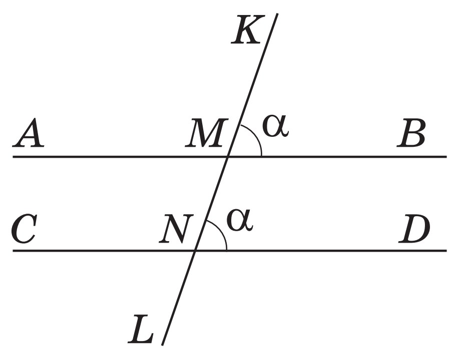
Ознака паралельності прямих

Розглянемо *ознаки* паралельності прямих.

Теорема (ознака паралельності прямих). **Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.**

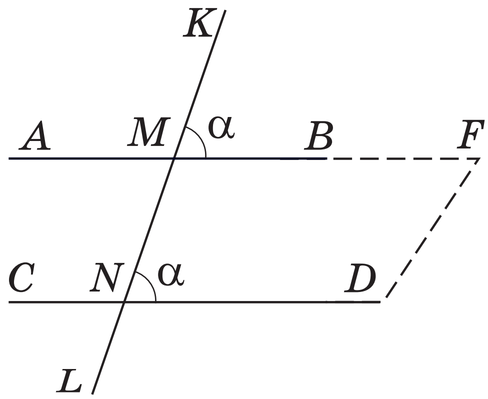
Доведення. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні між собою відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 9.2).

Доведемо теорему методом від супротивного.

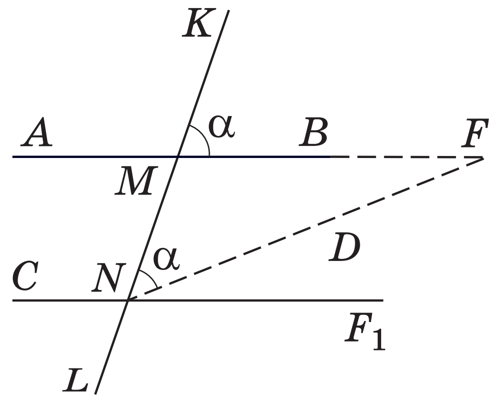


Мал. 9.2

Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 9.3). Не змінюючи міри кута KMB, перенесемо його так, щоб вершина кута – точка M – збіглася з точкою N, промінь MK збігся з променем NM, а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 9.4). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF, бо $F \notin NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж було встановлено, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.



Мал. 9.3



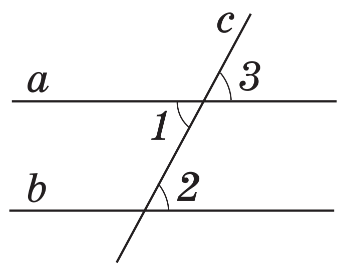
Мал. 9.4

Прийшли до протиріччя, бо наше припущення про те, що прямі *AB* і *CD* не паралельні, було хибним. А отже, прямі *AB* і *CD* паралельні, що й потрібно було довести. ■

Наслідки з ознаки паралельності прямих

Н Наслідок 1. **Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.**

Доведення. Нехай при перетині прямих *a* і *b* січною *c* внутрішні різносторонні кути виявилися рівними, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.).



Але кути *1* і *3* – вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Кути *2* і *3* – відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо $a \parallel b$. ■

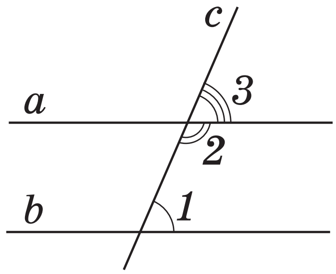
Н Наслідок 2. **Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.**

Доведення. Нехай при перетині прямих *a* і *b* січною *c* сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 70 09.07.2024 12:44:35

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (див. мал.). Кути *2* і *3* – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$.

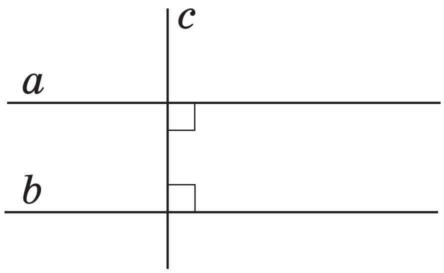
Із цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі *a* і *b* – паралельні за ознакою паралельності прямих. ■



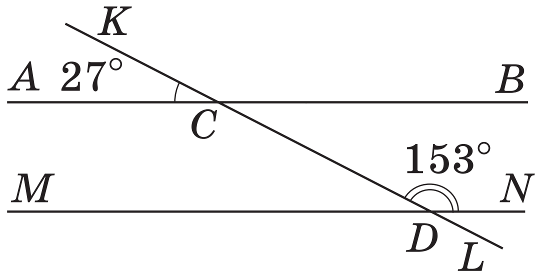
Наслідок 3. **Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.**

Доведення. На малюнку 9.5: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо $a \parallel b$. ■

Зауважимо, що наслідки 1–3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.



Мал. 9.5



Мал. 9.6

Приклад 2. Чи паралельні прямі *AB* і *MN* на малюнку 9.6?

Розв'язання. 1) $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). Отже, $\angle BCD = 27°$.

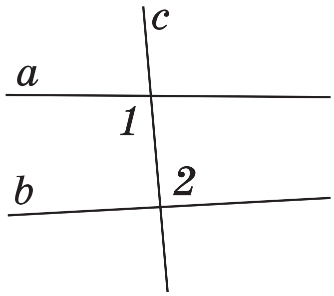
2) Оскільки $27° + 153° = 180°$, то сума внутрішніх односторонніх кутів *BCD* і *CDN* дорівнює 180°. Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

Відповідь: так.

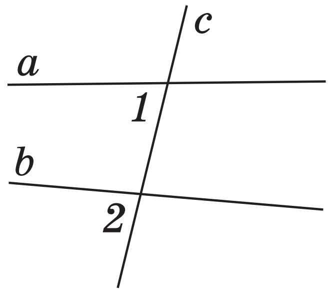
? Що таке січна? ○ За малюнком 9.1 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів. ○ Сформулюйте та доведіть ознаку паралельності прямих і наслідки з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

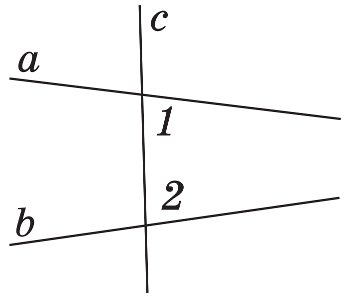
182. (*Усно*.) Як називають кути *1* і *2* на малюнках 9.7–9.9?



Мал. 9.7

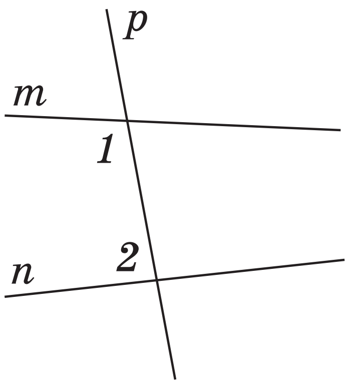


Мал. 9.8

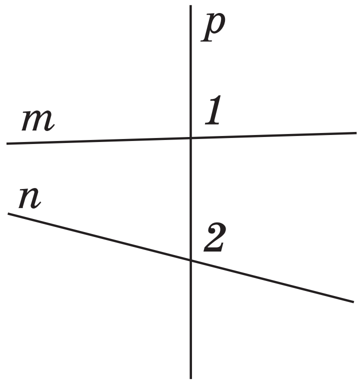


Мал. 9.9

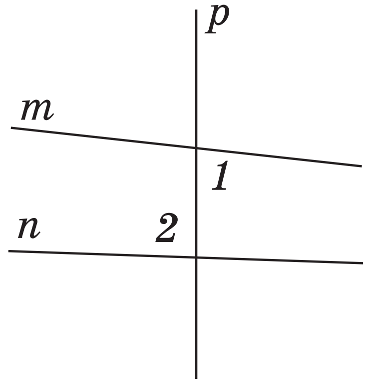
183. Запишіть, як називають кути *1* і *2* на малюнках 9.10–9.12.



Мал. 9.10

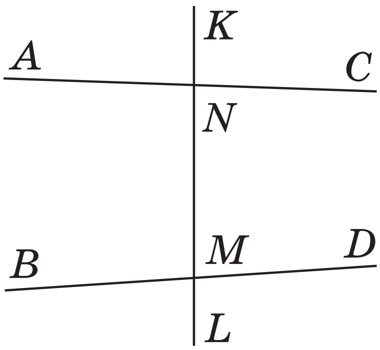


Мал. 9.11

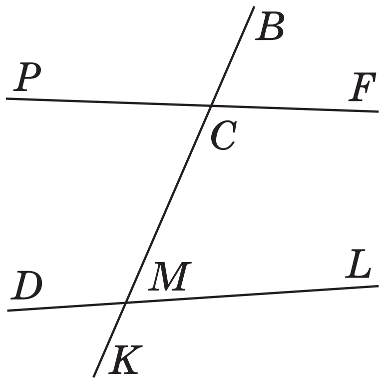


Мал. 9.12

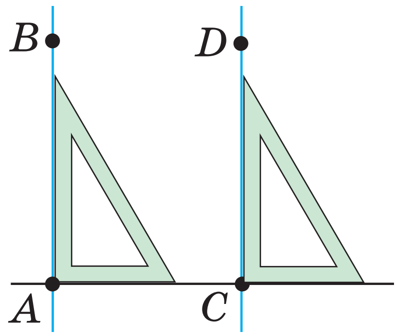
184. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 9.13).



Мал. 9.13



Мал. 9.14

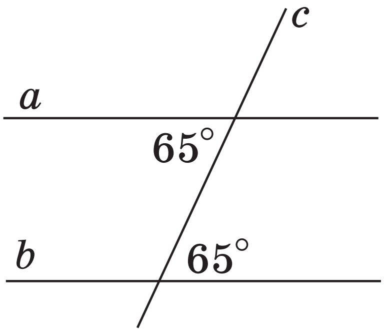


Мал. 9.15

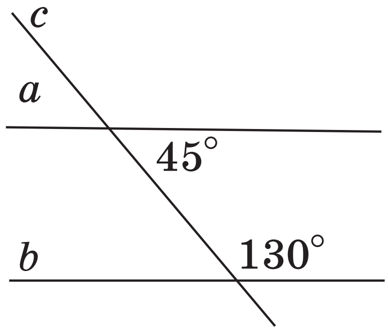
185. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 9.14).

186. (*Усно.*) Чи паралельні прямі *AB* і *CD* на малюнку 9.15? Чому?

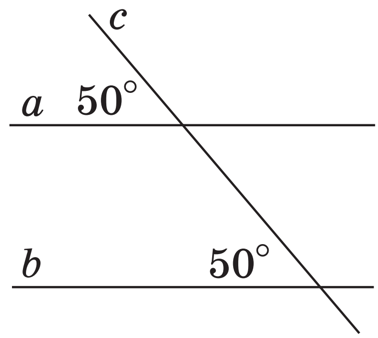
187. Якими є прямі *a* і *b* (паралельними чи такими, що перетинаються) на малюнках 9.16–9.21?



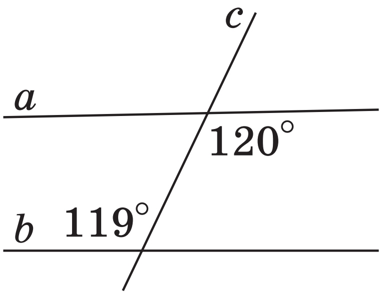
Мал. 9.16



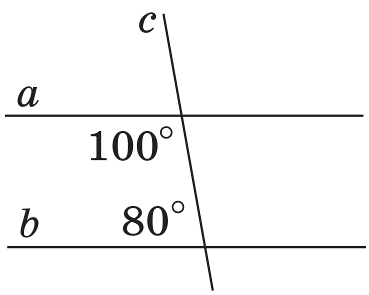
Мал. 9.17



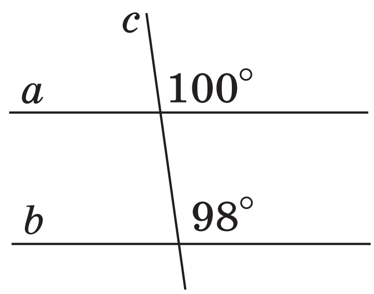
Мал. 9.18



Мал. 9.19

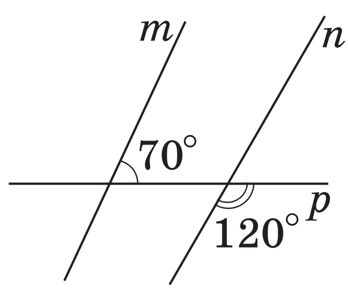


Мал. 9.20



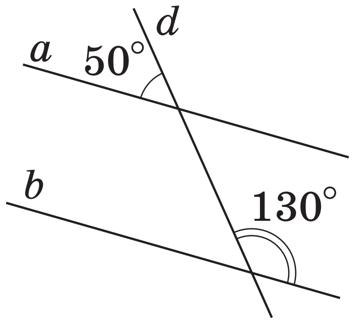
Мал. 9.21

188. На малюнку 9.22 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих *m* і *n* січною *p*. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі *m* і *n*?

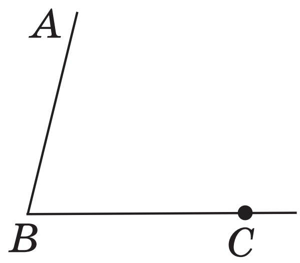


Мал. 9.22

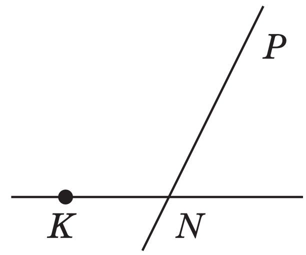
189. На малюнку 9.23 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих *a* і *b* січною *d*. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі *a* і *b*?



Мал. 9.23



Мал. 9.24



Мал. 9.25

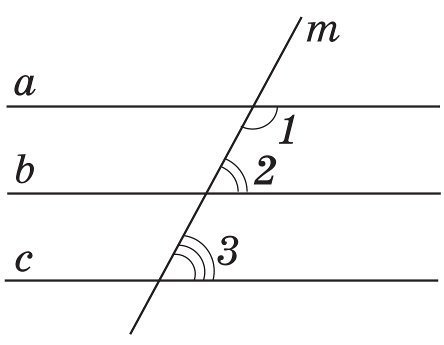
190. Доповніть малюнок 9.24: проведіть пряму *CM* так, щоб кути *ABC* і *BCM* були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих *AB* і *CM* та січної *BC*. Як розмістяться точки *A* і *M* відносно прямої *BC*?

191. Доповніть малюнок 9.25: проведіть пряму *KA* так, щоб кути *AKN* і *KNP* були внутрішніми односторонніми кутами для прямих *AK* і *PN* та січної *KN*. Як розмістяться точки *A* і *P* відносно прямої *KN*?

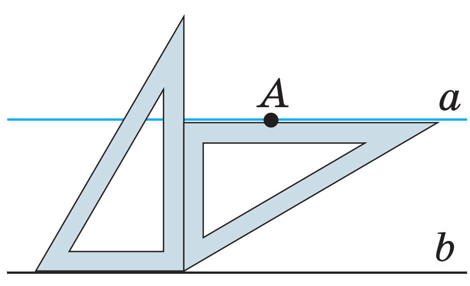
192. На малюнку 9.26 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 118°$, $\angle 2 = 62°$, $\angle 3 = 63°$.

193. На малюнку 9.26 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 121°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 60°$.

3 **194**. Через точку *A* за допомогою двох креслярських косинців провели пряму *a* (мал. 9.27). Чи паралельні прямі *a* і *b*? Відповідь обґрунтуйте.

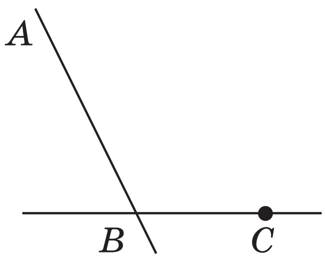


Мал. 9.26

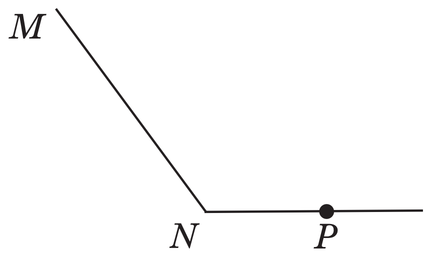


Мал. 9.27

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 74 09.07.2024 12:44:39



Мал. 9.28



Мал. 9.29

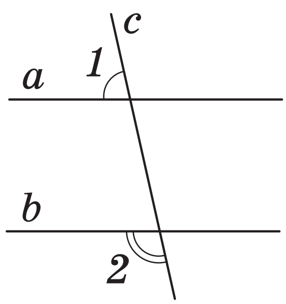
195. 1) Виміряйте $\angle ABC$ (мал. 9.28) і накресліть його в зошиті.
2) Побудуйте $\angle PCK$, що дорівнює куту ABC і є йому відповідним.
3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

196. 1) Виміряйте $\angle MNP$ (мал. 9.29) і накресліть його в зошиті.
2) Побудуйте $\angle APB$, що дорівнює куту MNP і є йому відповідним.
3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

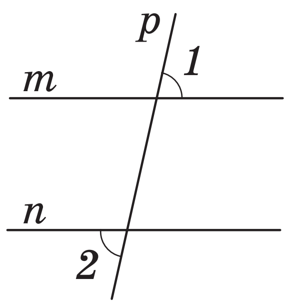
197. Пряма AB перетинає пряму CD у точці A, а пряму MN – у точці B, $\angle CAB = 90°$, $\angle ABN = 90°$. Чи паралельні прямі CD і MN?

198. На малюнку 9.30 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $a \parallel b$.

199. На малюнку 9.31 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі $m \parallel n$.



Мал. 9.30



Мал. 9.31

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 75 09.07.2024 12:44:39

200. На малюнку 9.32 $\angle 4 + \angle 5 = 190°$. Знайдіть:

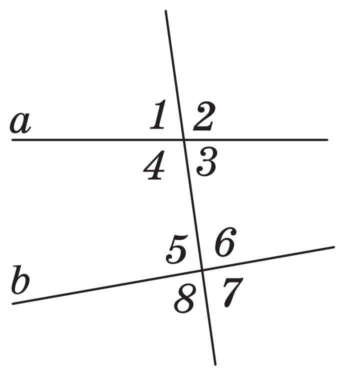
1) $\angle 2 + \angle 7$;

2) $\angle 1 + \angle 8$;

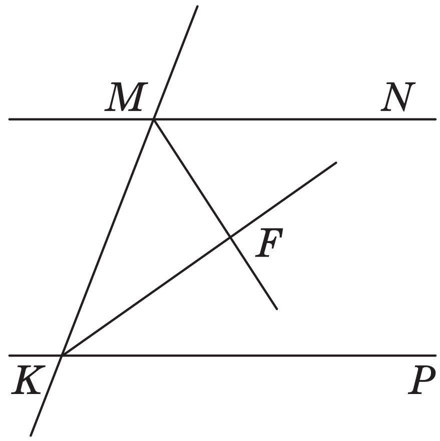
3) $\angle 3 + \angle 6$.

201. На малюнку 9.32 $\angle 3 + \angle 6 = 160°$. Знайдіть:

1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 4 + \angle 5$.



Мал. 9.32



Мал. 9.33

202. $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

203. $\angle MNP = 60°$, $\angle NPK = 120°$. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

4 **204**. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

205. Пряма c є січною для прямих a і b. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 30°, а решта чотири – по 150°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

206. MF – бісектриса кута KMN, KF – бісектриса кута MKP (мал. 9.33). $\angle MKF + \angle FMK = 90°$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

207. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Пряма c перетинає пряму a. Чи перетинаються прямі b і c? Відповідь обґрунтуйте.

Вправи для повторення

208. 1) Накресліть $\angle ABC = 70°$ і позначте точку K, що належить променю BA.

2) Через точку K за допомогою косинця проведіть пряму m, перпендикулярну до променя BA, та пряму n, перпендикулярну до променя BC.

3) Користуючись транспортиром, знайдіть кут між прямими m і n.

209. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC = 130°$. Знайдіть $\angle AOC$.

Життєва математика

210. *Задача-жарт*. Зріст Сергія 1 м 60 см. На скільки кілометрів верхівка голови Сергія пройшла б більше, ніж кінець його ноги, якби він мав змогу пройти земну кулю по її екватору?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

211. Чи можна трикутник розрізати на частини так, щоб утворилося три чотирикутники? Якщо так, то виконайте це.

§ 10. Властивість паралельних прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Властивості паралельних прямих

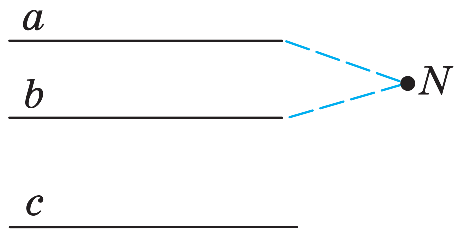
Розглянемо властивість паралельних прямих.

Теорема 1 (властивість паралельних прямих).
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 77 09.07.2024 12:44:40

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці N (мал. 10.1). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b, що паралельні прямій c. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено. ■



Мал. 10.1

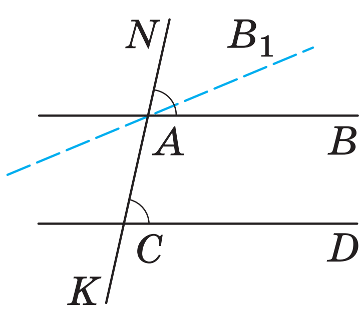
Властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною.

> **Т** Теорема 2 (властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною). **Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.**

Доведення. Нехай паралельні прямі AB і CD перетинає січна NK (мал. 10.2). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$.

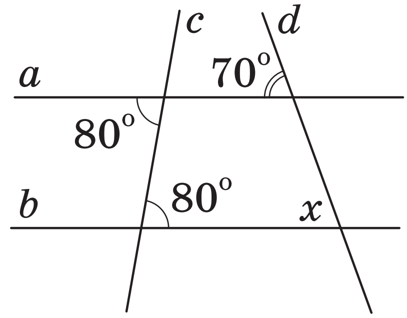
Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою і $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1, паралельні прямій CD, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним, і тому відповідні кути, утворені



Мал. 10.2

при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні: $\angle NAB = \angle ACD$. Теорему доведено. ■

Приклад 1. Знайти невідомий кут x за малюнком 10.3.



Мал. 10.3

Розв'язання. 1) Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b, рівні між собою (обидва по 80°), то $a \parallel b$.
2) Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b, рівні між собою. Тому $x = 70°$.
Відповідь: 70°.

Пряма та обернена теорема в геометрії

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема має умову і висновок. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то одержимо нове твердження (правильне або неправильне), умовою якого буде висновок цієї теореми, а висновком – її умова. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають *теоремою, оберненою до даної,* а цю теорему – *прямою*.

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком – друга частина: «прямі паралельні» (це потрібно довести). Бачимо, що остання теорема, яку ми розглянули, і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок – «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою» (це потрібно довести).

Не для кожної теореми буде справджуватися й обернена теорема. Наприклад, для теореми про властивість вертикальних кутів не існує оберненої, оскільки твердження: «якщо два кути між собою рівні, то вони вертикальні» – неправильне.

Систематизуємо викладене вище в таблиці.

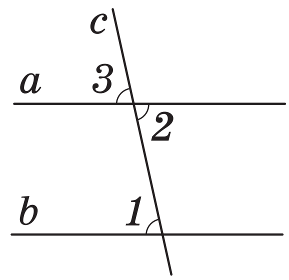
Частина твердження (теореми)	*Ознака паралельності прямих (пряма теорема)*	*Властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (обернена теорема)*
Умова	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою	Прямі паралельні
Висновок	Прямі паралельні	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою

Властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо наслідок з теореми 2.

Н Наслідок 1 **(властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.**

Доведення. Нехай паралельні прямі *a* і *b* перетинає січна *c* (мал. 10.4). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад *1* і *2*, рівні між собою.



Мал. 10.4

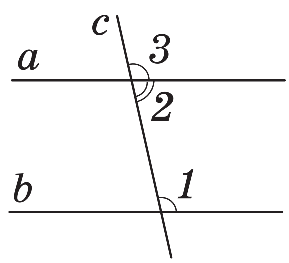
Оскільки *a* || *b*, то відповідні кути *1* і *3* рівні між собою. Кути *2* і *3* між собою рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. ■

Властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо ще один наслідок з теореми 2.

> **Н** Наслідок 2 **(властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.**

Доведення. Нехай паралельні прямі *a* і *b* перетинає січна *c* (мал. 10.5). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад *1* і *2*, дорівнює 180°.



Мал. 10.5

Оскільки *a* || *b*, то відповідні кути *1* і *3* рівні між собою. Кути *2* і *3* – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ■

Приклад 2. Знайти градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить $\frac{2}{3}$ від іншого.

Розв’язання. Нехай кути *1* і *2* (мал. 10.5) – внутрішні односторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих *a* і *b* січною *c*.

1) За властивістю цих кутів маємо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

2) Нехай $\angle 1 = x°$, $\angle 2 = \frac{2}{3}x°$.

3) Маємо рівняння $x + \frac{2}{3}x = 180°$, звідки $x = 108°$.

4) Отже, $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = \frac{2}{3} \cdot 108° = 72°$.

Відповідь: 108°; 72°.

Властивості паралельних прямих

Теорему 2 та наслідки з неї також можна розглядати як *властивості паралельних прямих* і використовувати для розв’язування задач.

? Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. ● Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, і наслідки з неї. ● Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

212. (*Усно.*) На малюнку 10.6 *a* || *b*, *c* – січна.

1) Чи рівні між собою кути *5* і *4*; *2* і *7*?

2) Чи рівні між собою кути *1* і *3*?

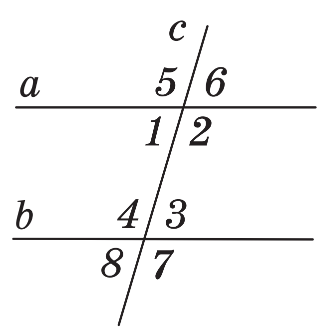
3) Обчисліть суму кутів *1* і *4*.

213. На малюнку 10.6 прямі *a* і *b* паралельні, *c* – січна.

1) Чи рівні між собою кути *1* і *8*; *6* і *3*?

2) Чи рівні між собою кути *2* і *4*?

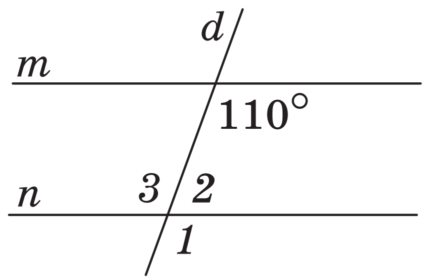
3) Обчисліть суму кутів *2* і *3*.



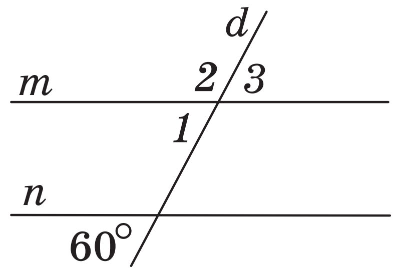
Мал. 10.6

214. $m \parallel n$, d – січна (мал. 10.7). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

215. $m \parallel n$, d – січна (мал. 10.8). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 10.7



Мал. 10.8

2

216. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 140°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

217. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть інші сім кутів.

218. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:

1) 133°; 2) 143°; 3) 153°?

219. Дано паралельні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з прямих. Через точку M паралельно прямій a проведено пряму m. Чи паралельні прямі b і m?

220. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їх сума дорівнює 240°.

221. Сума двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108°. Знайдіть ці кути.

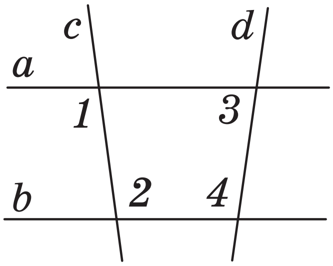
222. На малюнку 10.9 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

223. На малюнку 10.10 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

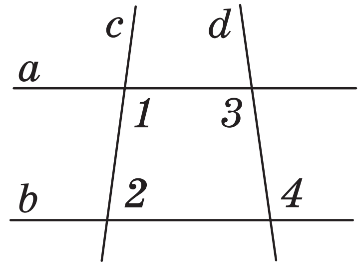
Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[СлЗ]_(028-24)_V1.indd 83 09.07.2024 12:44:43

224. На малюнку 10.11 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

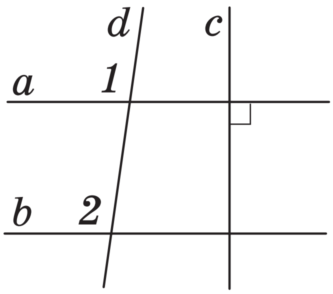
225. На малюнку 10.12 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



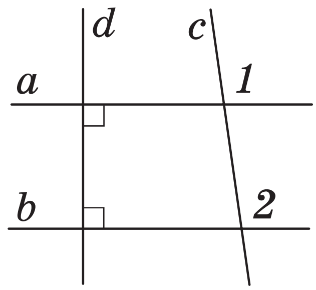
Мал. 10.9



Мал. 10.10



Мал. 10.11



Мал. 10.12

3

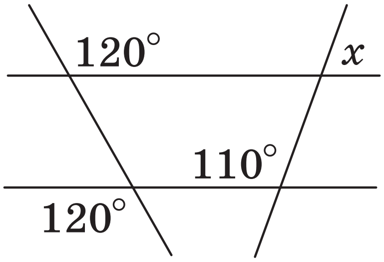
226. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них на 16° більший за другий;
2) один з них утричі менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 7.

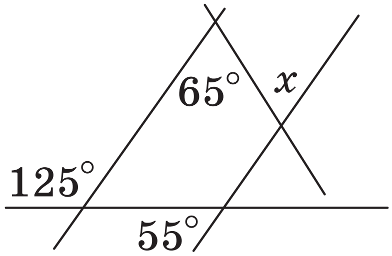
227. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них у 4 рази більший за другий;
2) один з них на 8° менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 4.

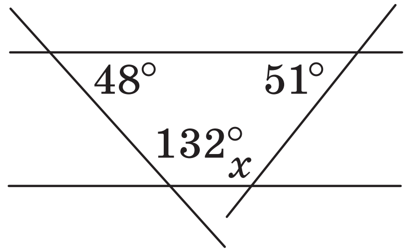
228. Знайдіть градусну міру кута *x* на кожному з малюнків 10.13–10.15.



Мал. 10.13

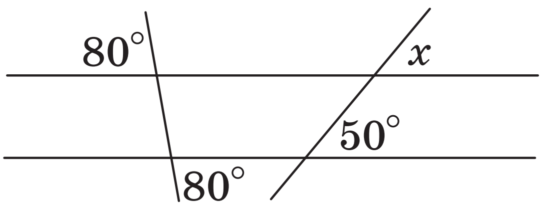


Мал. 10.14

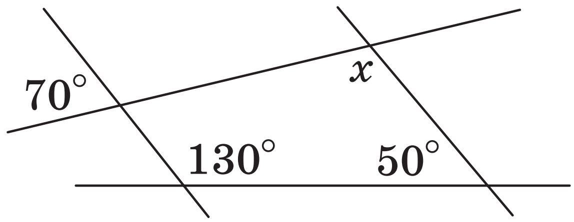


Мал. 10.15

229. Знайдіть градусну міру кута *x* на малюнках 10.16 і 10.17.



Мал. 10.16



Мал. 10.17

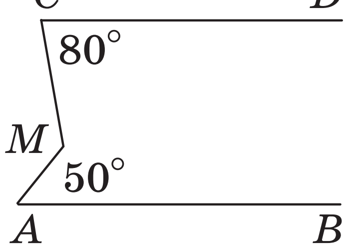
230. Прямі *a* і *b* не паралельні прямій *m*. Чи можна зробити висновок, що прямі *a* і *b* не паралельні між собою?

231. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 120°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

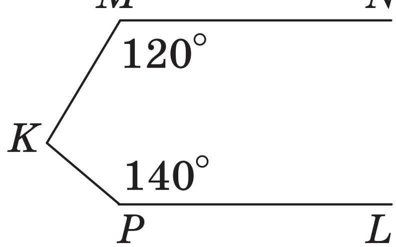
232. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 128°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

4 **233.** На малюнку 10.18 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle CMA$.

234. На малюнку 10.19 $MN \parallel PL$. Знайдіть $\angle MKP$.



Мал. 10.18



Мал. 10.19

235. Доведіть, що бісектриси пари внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

236. Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

Вправи для повторення

237. Накресліть відрізок AB, промінь CD та пряму a так, щоб відрізок AB був перпендикулярним до променя CD, але не перетинав його, а промінь CD був паралельний прямій a.

238. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та дізнайтеся прізвище видатного українського письменника.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 16 см. Знайдіть відрізки AC і BC, якщо:	AC	BC
AC більший за BC на 2 см	Н	А
AC більший за BC утричі	О	Ф
$AC : BC = 5 : 3$	К	Р

4 см	6 см	7 см	9 см	10 см	12 см

Життєва математика

239. Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 90 грн. Скільки коштів потрібно, щоб засіяти газонною травою клумбу у формі квадрата, сторона якого 20 м?

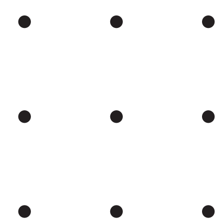
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

240. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $AB = 3$ см, $AC = 4$ см. Виміряйте сторону BC цього трикутника та знайдіть його периметр.

241. Одна сторона трикутника дорівнює 8 см, друга – 7 см. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

242. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (див. мал.) чотири відрізки.

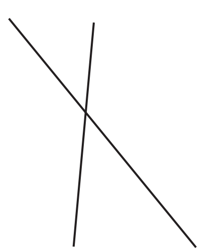


ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§7–10)

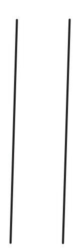
Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. На якому з малюнків 10.20–10.23 зображено перпендикулярні прямі?

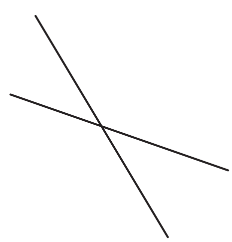
А. мал. 10.20
Б. мал. 10.21
В. мал. 10.22
Г. мал. 10.23



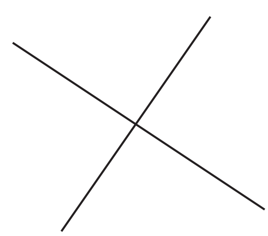
Мал. 10.20



Мал. 10.21



Мал. 10.22



Мал. 10.23

2. Укажіть, на якому з малюнків 10.20–10.23 зображено паралельні прямі:

А. мал. 10.20 **Б.** мал. 10.21

В. мал. 10.22 **Г.** мал. 10.23

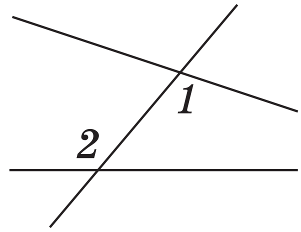
3. Як називають кути *1* і *2* на малюнку 10.24?

А. внутрішні односторонні

Б. відповідні

В. вертикальні

Г. внутрішні різносторонні



Мал. 10.24

4. Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним:

А. перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку

Б. перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку

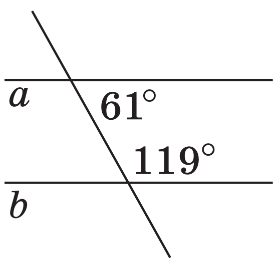
В. перпендикулярні промені завжди мають спільну точку

Г. перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку

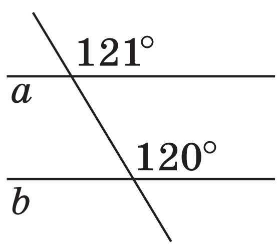
5. На якому з малюнків 10.25–10.28 прямі *a* і *b* паралельні?

А. мал. 10.25 **Б.** мал. 10.26

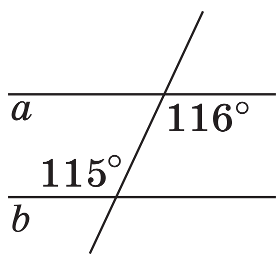
В. мал. 10.27 **Г.** мал. 10.28



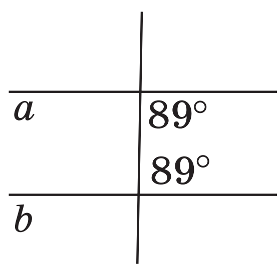
Мал. 10.25



Мал. 10.26



Мал. 10.27



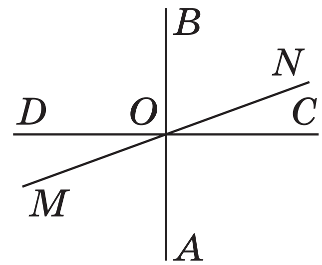
Мал. 10.28

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35°. Якою може бути градусна міра одного з інших семи кутів?

А. 50° **Б.** 105°

В. 145° **Г.** 55°

3 **7**. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (див. мал.). $\angle MOD = 20°$. Знайдіть градусну міру кута AON.



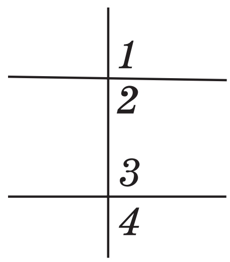
А. 20° **Б.** 70° **В.** 110° **Г.** 160°

8. На малюнку 10.29 $\angle 2 + \angle 3 = 175°$. Знайдіть $\angle 1 + \angle 4$.

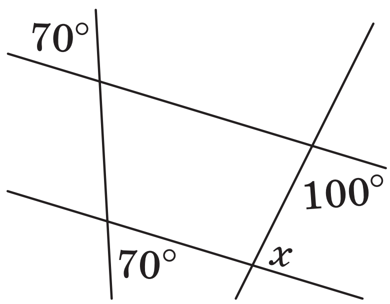
А. 195° **Б.** 185° **В.** 175° **Г.** 165°

9. За малюнком 10.30 знайдіть градусну міру кута x.

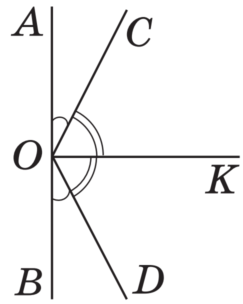
А. 80° **Б.** 70° **В.** 100° **Г.** 110°



Мал. 10.29



Мал. 10.30

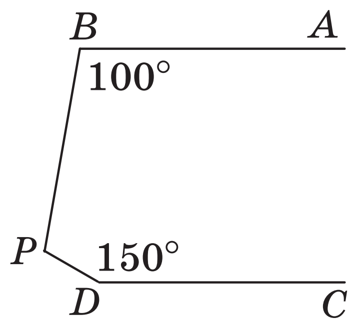


Мал. 10.31

4 **10**. На малюнку 10.31 точки A, O і B лежать на одній прямій, $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COK = \angle DOK$. Знайдіть, якщо це можливо, градусну міру кута AOK.

А. знайти неможливо **Б.** 80°
В. 90° **Г.** 100°

11. Прямі AB і CD паралельні (див. мал.). Тоді $\angle BPD = ...$



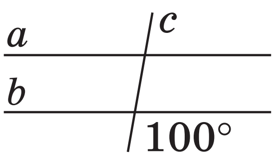
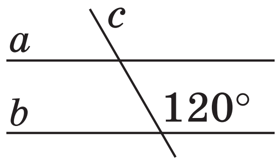
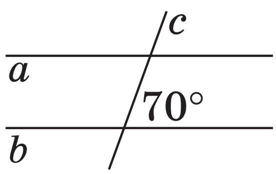
А. 100° **Б.** 110°
В. 130° **Г.** 150°

12. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB. OK – бісектриса кута AOC, OL – бісектриса кута COB. $OK \perp OL$. Визначте вид кута AOB.

А. гострий **Б.** тупий **В.** прямий **Г.** розгорнутий

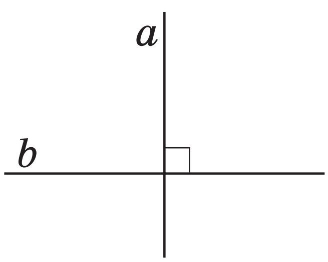
У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. На кожному малюнку прямі *a* і *b* – паралельні, *c* – січна. Установіть відповідність між малюнками (1–3) та градусною мірою кута між прямими *a* і *c* (А–Г).

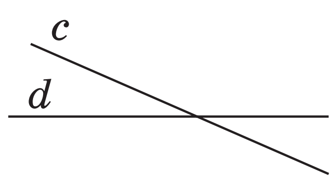
Малюнок	*Кут між прямими a і c*
1. 	**А.** 60°
2. 	**Б.** 70°
3. 	**В.** 80°
	Г. 100°

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 7–10

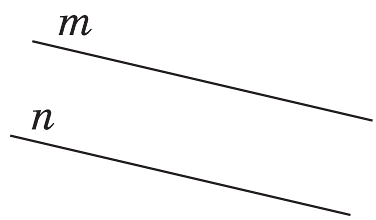
1. На якому з малюнків 10.32–10.34 зображено паралельні прямі, а на якому – перпендикулярні? Виконайте відповідні записи.



Мал. 10.32



Мал. 10.33



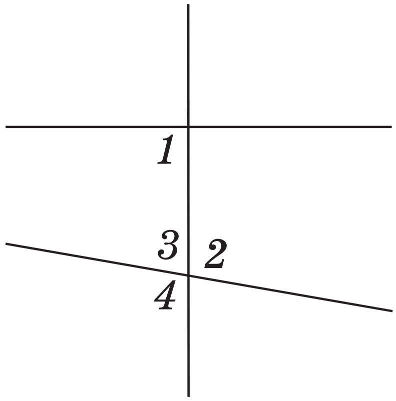
Мал. 10.34

2. Накресліть пряму *a* та позначте точку *N*, яка їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку *N* проведіть:

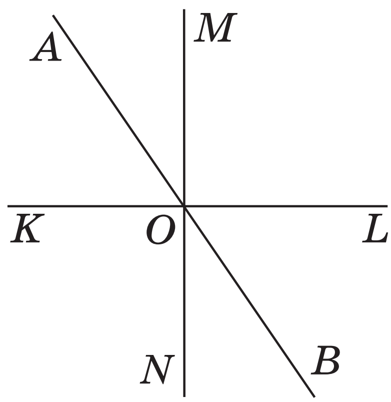
1) пряму b, перпендикулярну до прямої a;
2) пряму c, перпендикулярну до прямої b.

3. За малюнком 10.35 укажіть, як називають пару кутів:
1) *1* і *2*;
2) *1* і *3*;
3) *1* і *4*?

2 **4**. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 10.36). Чи перпендикулярні прямі KL і MN, якщо:
1) $\angle KOA = 70°$, $\angle AOM = 19°$;
2) $\angle NOB = 21°$, $\angle KOB = 111°$?



Мал. 10.35

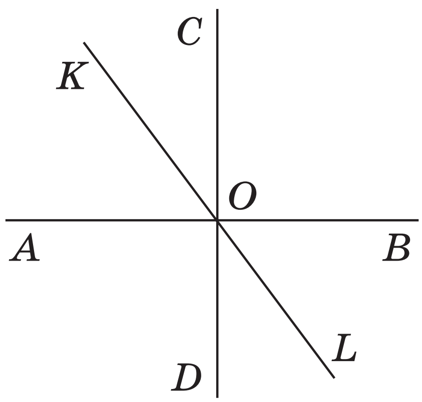


Мал. 10.36

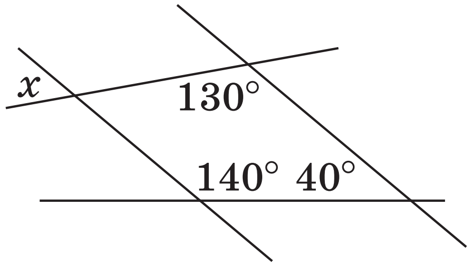
5. Накресліть промені AB і CD та відрізок MN так, щоб промінь AB був паралельний відрізку MN і перпендикулярний до променя CD.

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

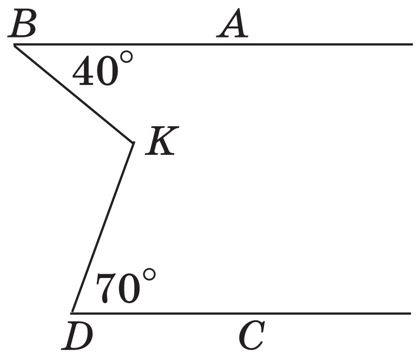
3 **7**. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 10.37). Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle DOL = 38°$.



Мал. 10.37



Мал. 10.38



Мал. 10.39

8. За малюнком 10.38 знайдіть градусну міру кута *x*.

4 **9**. На малюнку 10.39 *AB* || *CD*. Знайдіть ∠*BKD*.

Додаткові вправи

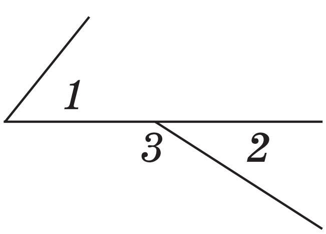
3 **10**. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них у 4 рази більший за другий.

4 **11**. Пряма *m* є січною для прямих *c* і *d*. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 50°, а решта – по 130°. Чи можна стверджувати, що прямі *c* і *d* між собою паралельні?

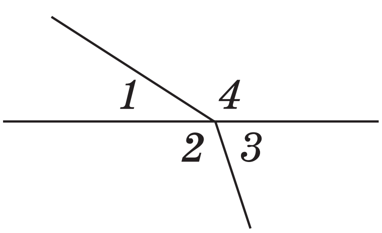
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 5

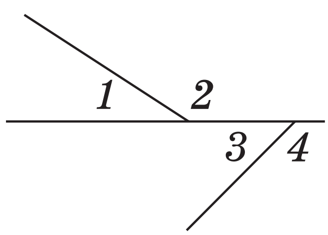
1 **243**. Серед кутів, які зображено на малюнках 1–3, укажіть ті, що є суміжними.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 92 09.07.2024 12:44:50

244. 1) Чи можна, використовуючи лише олівець та лінійку, побудувати кут, суміжний з даним?
2) Скільки таких кутів можна побудувати?

245. $\angle ABC$ менший, ніж $\angle MNP$. У якого з кутів суміжний кут більший? Відповідь обґрунтуйте.

246. Знайдіть суміжні кути, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 7.

247. Один із суміжних кутів становить 20 % від іншого. Знайдіть ці кути.

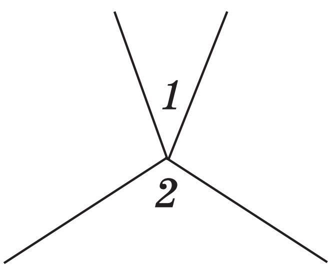
248. Один із суміжних кутів на 20 % менший від іншого. Знайдіть ці кути.

249. Бісектриса кута *ABC* утворює зі стороною кут, удвічі більший за кут, суміжний з кутом *ABC*. Знайдіть $\angle ABC$.

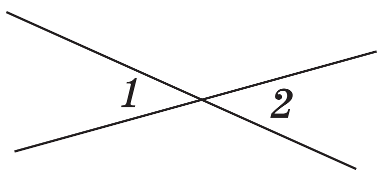
До § 6

250. Який предмет домашнього вжитку дає уявлення про вертикальні кути?

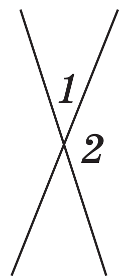
251. Чи є кути *1* і *2* вертикальними (мал. 4–8)?



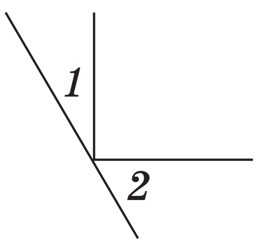
Мал. 4



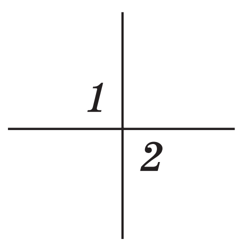
Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

252. Чи є правильними твердження:

1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;

2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;

3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один вертикальний кут;

4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один суміжний кут?

253. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

1) 5° і 175°; 2) 15° і 19°;

3) 27° і 154°; 4) 3° і 3°?

254. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 48° більший за інший. Знайдіть кут між прямими.

255. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

256. Знайдіть градусну міру кожного із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

1) менша від суми двох інших у 4 рази;

2) більша за суму двох інших на 160°.

257. Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, у 8 разів менший від суми трьох інших кутів.

До § 7

258. Накресліть пряму *a* та позначте точку *M*, що їй не належить. За допомогою косинця проведіть з точки *M* перпендикуляр до прямої *a*. Виміряйте відстань від точки *M* до прямої *a*.

259. Накресліть гострий $\angle KAM$, позначте на стороні AK точку B. Побудуйте за допомогою косинця пряму, що проходить через точку B перпендикулярно до AK.

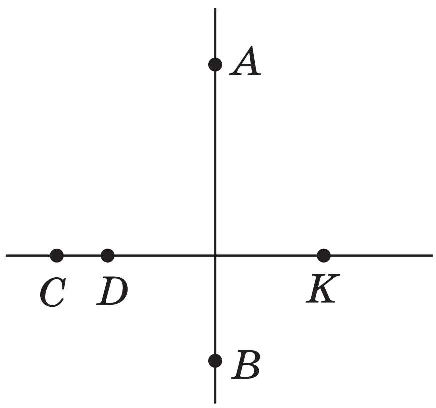
2 **260**. Накресліть промінь AB і відрізок KP так, щоб вони були перпендикулярними і не перетиналися.

3 **261**. Назвіть усі пари перпендикулярних між собою відрізків на малюнку 9. Виконайте відповідні записи.

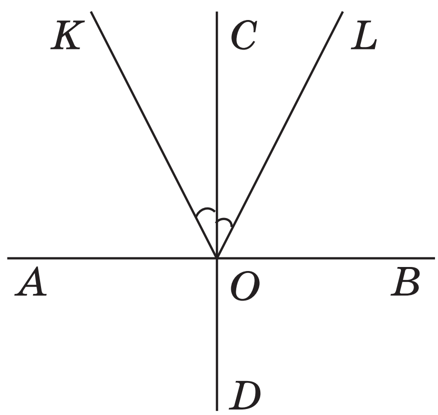
262. На малюнку 10: $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.

1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOB$?

2) Порівняйте $\angle KOB$ і $\angle AOK$.



Мал. 9



Мал. 10

263. 1) Чи можуть два гострих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?

2) Чи можуть два тупих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?

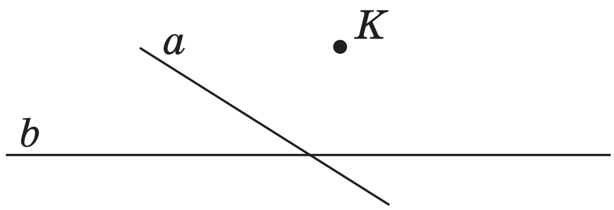
4 **264**. Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого 6°, побудувати взаємно перпендикулярні прямі?

* **265**. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD взаємно перпендикулярні, то точки A, B і D лежать на одній прямій.

До § 8

1 **266**. Накресліть відрізки *AB* і *CD* так, щоб вони були паралельними між собою.

2 **267**. На малюнку 11 зображено дві прямі *a* і *b*, що перетинаються, та точку *K*, що не належить жодній з них. Проведіть через точку *K* прямі, паралельні прямим *a* і *b*.



Мал. 11

268. 1) Прямі *a* і *b* не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони між собою паралельні?
2) Відрізки *AB* і *CD* не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?
3) Промені *MN* і *KL* не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

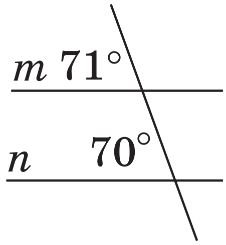
3 **269**. Дано пряму *a* і точку *K*, що їй не належить. Через точку *K* провели дві прямі *b* і *c*. Як можуть розміщуватися ці прямі відносно прямої *a*? Розгляньте всі випадки та виконайте до них малюнки.

4 **270**. Прямі *a* і *b* – паралельні, а прямі *b* і *n* – перетинаються. Пряма *c* паралельна прямій *b*. Доведіть, що пряма *c* перетинає пряму *n* і паралельна прямій *a*.

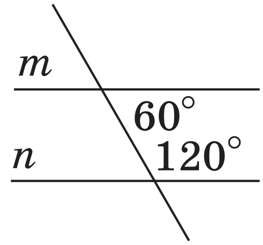
До § 9

1 **271**. Накресліть дві прямі та їхню січну. Пронумеруйте кути, що утворилися, числами від 1 до 8. Які із цих кутів будуть внутрішніми односторонніми, які – внутрішніми різносторонніми, а які – відповідними?

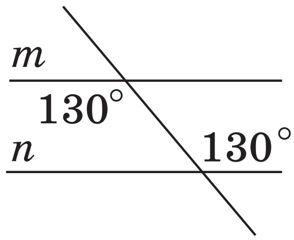
272. Чи є прямі *m* і *n* паралельними на малюнках 12–15?



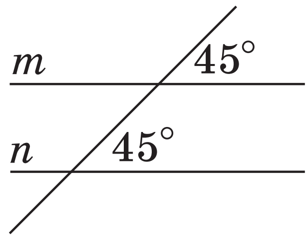
Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14



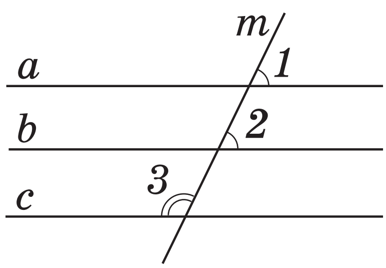
Мал. 15

273. При перетині прямих *a* і *b* січною *c* утворилися два між собою рівні гострі кути. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?

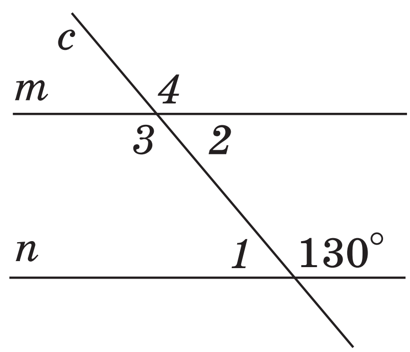
274. На малюнку 16: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Чи є прямі *a* і *c* паралельними між собою?

До § 10

275. На малюнку 17 прямі *m* і *n* – паралельні, *c* – січна. Знайдіть градусні міри кутів *1*, *2*, *3*, *4*.



Мал. 16



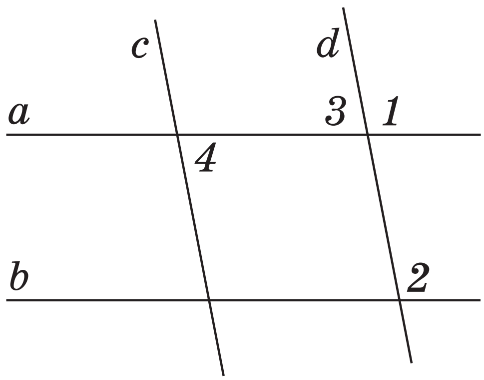
Мал. 17

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 97 09.07.2024 12:44:54

2 **276**. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.

3 **277**. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить 80 % від другого.

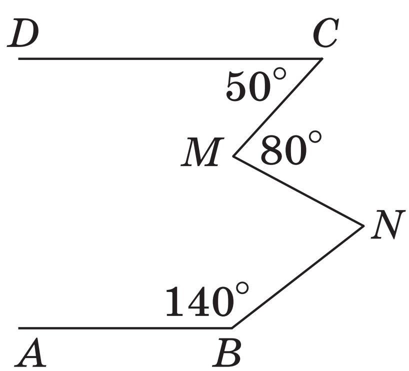
278. $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100^\circ$ (мал. 18). Знайдіть градусні міри кутів *2*, *3*, *4*.



Мал. 18

4 **279**. Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

* **280**. Прямі AB і CD паралельні (мал. 19). Знайдіть $\angle MNB$.



Мал. 19

Головне в розділі 2

✓Два **кути суміжні**, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

ВЛАСТИВІСТЬ СУМІЖНИХ КУТІВ

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

✓Два **кути вертикальні**, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.

ВЛАСТИВІСТЬ ВЕРТИКАЛЬНИХ КУТІВ

Вертикальні кути рівні.

✓**Кут між прямими, що перетинаються,** – менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

✓Дві **прямі перпендикулярні**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

✓Через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

✓**Перпендикуляр до прямої**, проведений з даної точки, – відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжина цього відрізка – **відстань від точки до прямої**.

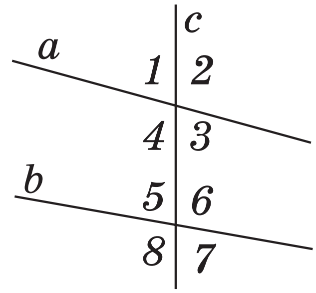
✓Дві **прямі** на площині **паралельні**, якщо вони не перетинаються.

АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 99 09.07.2024 12:44:54

КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ:



внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.

ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

✓Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні між собою, то прямі паралельні.

✓Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.

✓Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

✓Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

✓Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.

✓Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

✓Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.

✓Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 100 09.07.2024 12:44:54

Михайло Кравчук – відомий у світі й незнаний в Україні

Вислів «Рукописи не горять!», на щастя, іноді справджується… У селі Саварка, що на Богуславщині, на горищі хатини, у якій у 20-ті роки XX ст. мешкали вчителі, через 80 років випадково знайшли мішок, наповнений паперами й книжками… Пожовклі зшитки зошитів виявилися конспектами вчителів, які працювали в Саварській школі на початку минулого століття. І серед них – рукописний підручник Михайла Кравчука!

96 аркушів густо списаного зошита, на першій сторінці якого напис: **«Геометрія для семирічних трудових шкіл, 1920 рік»**, – виявилися сторінками неопублікованого підручника генія української математики!

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) – найвизначніший український математик XX ст., всесвітньо відомий учений, педагог, громадський діяч, дійсний член Всеукраїнської академії наук, учений світової слави. Його ім’я добре відоме у світовій математичній науці, але широкому загалу не було відомо, що він – українець. Його наукові праці з різних галузей математики увічнилися в безцінній скарбниці науки. Творець першого у світі електронного цифрового комп’ютера – американський фізик Джон Вінсент Атанасов – під час розробки свого творіння щедро користався теоретичними напрацюваннями Михайла Кравчука. Так він засвідчив, що наш співвітчизник заслужено належить до співзасновників ЕОМ (електронно-обчислювальної машини). Теоретичні розробки М. Кравчука було використано й під час формування перших мереж телебачення у США та Японії.

М. П. Кравчук

Народився Михайло Кравчук у селі Човниця на Волині в родині землеміра та вчительки. Після закінчення чоловічої гімназії з 1910 по 1914 рік навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира (нині – Київський національний університет імені Тараса Шевченка). Викладачі одразу вирізнили його з-поміж інших за парадоксальність мислення. Академік Д. Граве, який створив алгебраїчну школу, давав молодому вченому чудові рекомендації, вважав його одним з найталановитіших своїх учнів і просив залишитися при університеті професорським стипендіатом для підготовки до наукової та викладацької роботи. Вільні від студіювання вечори Михайло проводив в Українському клубі, у Народному домі на Лук'янівці, де ставив свої вистави український театр під керівництвом М. Старицького.

Після отримання звання приват-доцента Михайло Кравчук працює як математик-науковець і як педагог. Викладає у двох новостворених українських гімназіях та Українському народному університеті, з 1918-го – співробітник Української академії наук. Кажуть, що в Кравчука була така красива й милозвучна українська мова, що на його математичні лекції із захопленням приходили й філологи – слухати неймовірну вимову викладача. Лекції відзначалися великим багатством і глибиною змісту, логікою і чіткістю викладу, широтою охоплення матеріалу, особливою красою та витонченістю викладу. Водночас найскладніші математичні положення Михайло Пилипович подавав дохідливо й зрозуміло, але не в спрощеній формі. На лекціях Кравчука ніколи не було вільних місць: слухати його приходили ще й біологи, хіміки, філософи… Він перший в Україні почав писати математичні праці українською мовою. Підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під головуванням Кравчука створила й перший тритомний математичний словник.

Михайло Пилипович підготував кілька підручників з математики українською мовою. У 1919 р. вийшов друком його курс лекцій з геометрії, який він прочитав в Українському народному університеті. У тому самому році опубліковано перший переклад українською мовою, який здійснив Кравчук, широко відомого підручника з геометрії Кисельова.

Економічна руйнація початку 20-х років XX ст. примусила науковця виїхати в село Саварка Богуславського району на Київщині, де він став директором школи. Тут М. Кравчук мав можливість реально втілити свої педагогічні задуми. Крім безпосередньо навчання, Кравчук приділяв велику увагу виявленню та вихованню обдарованих учнів. Він навчав математики **Архипа Люльку** (автора-конструктора першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна, творця літаків з надзвуковою швидкістю), а пізніше – **Сергія Корольова** (ученого-конструктора, основоположника радянської космонавтики), **Володимира Челомея** (провідного творця радянського «ядерного щита», конструктора ракетно-космічної та авіаційної техніки, розробника перших супутників).

М. Кравчука запрошують до роботи у Всеукраїнську академію педагогічних наук (ВУАПН), де він очолює комісію математичної статистики, обіймає посаду вченого секретаря президії Академії, завідує відділом математичної статистики Інституту математики ВУАПН. Водночас він – член управи Київського інституту народної освіти, декан факультету професійної освіти; активний громадський діяч – член секції наукових працівників міської ради, організатор першої в Україні **математичної олімпіади** для обдарованих школярів (1935 р.).

Добре володіючи п'ятьма мовами (французькою, німецькою, італійською, польською та російською), молодий учений листувався з колегами з різних країн. М. Кравчука було обрано членом математичних товариств Франції, Німеччини, Італії. Але в сумнозвісному 1937 р. в тодішній газеті «Комуніст» з'явилася наклепницька стаття «Академік Кравчук підтримує ворогів народу». Йому дорікали листуванням з львівськими вченими, обвинувачували в націоналізмі. У 1938 р. М. Кравчука заарештували, інкримінувавши йому «вбивчий» на той час набір контрреволюційних стереотипів: націоналіст, шпигун. Суд над Михайлом Кравчуком тривав усього 30 хвилин, але вирок – 20 років тюремного ув'язнення та 5 років заслання. В останньому слові на суді М. Кравчук просив дати йому можливість закінчити розпочату працю з математики.

Незважаючи на хворе серце та повністю підірване у в'язниці здоров'я, М. Кравчук і вдень і вночі невтомно працював на науковій ниві. Своєї реабілітації вчений не дочекався. Його було посмертно реабілітовано лише в 1956 р., а в 1992 р. поновлено в складі дійсних членів Академії наук України.

Його спадок налічує понад 180 наукових праць. Його пам'ять ушановують і нині.

У 1987 р. у с. Човниця, на батьківщині академіка, було встановлено його погруддя та відкрито музей М. Кравчука.

У 2003 р. на території Політехнічного інституту в Києві, вперше в Україні, відкрито пам'ятник Михайлові Кравчуку. «Моя любов – Україна і математика» – викарбувано на постаменті пам'ятника. Щороку в цьому навчальному закладі проводяться конференції імені академіка Кравчука, засновано стипендію М. Кравчука для кращих студентів.

У 2009 р. в Києві, на Харківському житловому масиві, одну з нових вулиць було названо на честь Михайла Кравчука.

Ім'я математика присвоєно Луцькій гімназії № 21, що міститься на вулиці Академіка Кравчука, де також до 110-річчя від дня народження було відкрито музей видатного вченого.

У 2012 р. Національний банк України ввів в обіг пам'ятну монету номіналом 2 гривні, присвячену М. П. Кравчуку.

Уже в XXI ст. ЮНЕСКО внесла ім'я М. П. Кравчука до переліку найвизначніших людей планети.

А чи зможете ви розв'язати геометричні задачі Київських міських олімпіад з математики, що пропонувалися пів століття тому?

1. (1950 р.) Розділіть прямокутник розміром 18×8 на дві частини так, щоб з них можна було утворити квадрат.

2. (1975 р.) У країні 1000 доріг з'єднують 200 міст, причому з кожного міста виходить хоча б одна дорога. Яку найбільшу кількість доріг можна одночасно закрити на ремонт, не порушуючи при цьому зв'язок між містами?

Відповідь: 801.

3. (1978 р.) Точки *A*, *B*, *C* розміщені так, що, незалежно від вибору точки *M*, відрізок *AM* коротший від одного з відрізків *BM* або *CM*. Доведіть, що точка *M* належить відрізку *BC*.

4. (1979 р.) Розмістіть 6 точок на площині так, щоб кожні 3 з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

5. (1985 р.) Довільний трикутник розріжте на 3 частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.

6. (1987 р.) Чи можна квадрат розміром 6×6 розрізати на прямокутники розміром 1×4?

Розділ 3

ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

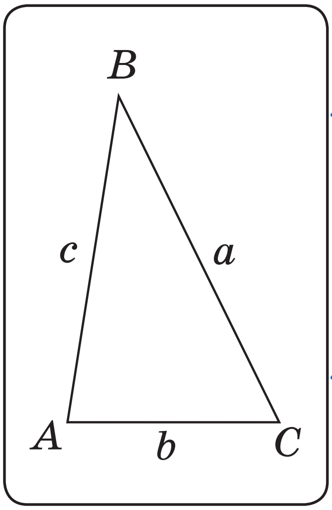
- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів та види трикутників;
- **дізнаєтеся** про висоту, медіану і бісектрису трикутника, нерівність трикутника та співвідношення між сторонами і кутами трикутника; суму кутів трикутника;
- **навчитеся** доводити рівність трикутників на основі ознак; застосовувати властивості рівнобедреного та прямокутного трикутників до розв’язування задач.

§ 11. Трикутник і його елементи

Трикутник

Позначимо три точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (див. мал.).

Трикутником **називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.**



Точки *A*, *B* і *C* – *вершини трикутника*.
Відрізки *AB*, *BC* і *CA* – *сторони трикутника*.
Кути *BAC*, *ABC* і *BCA* – *кути трикутника*.

Трикутник *ABC* записують: $\triangle$ *ABC*, та читають: «Трикутник *ABC*».
Назва трикутника складається з букв, якими позначають його вершини, і записувати їх можна у будь-якому порядку: $\triangle$ *ACB*, $\triangle$ *BCA*, $\triangle$ *CAB* тощо.

Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати лише їхньою вершиною – однією буквою: $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту *a*, *b* і *c* відповідно до позначення протилежних їм вершин.

! Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають *елементами трикутника*.

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[Сл3]_(028-24)_V1.indd 107 09.07.2024 12:44:57

Периметр трикутника

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою *P*, наприклад, $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника *ABC*:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA.$$

Приклад. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша від другої і вдвічі менша від третьої. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

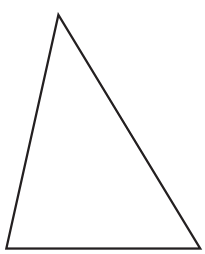
Розв'язання. 1) Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої – $(x + 7)$ см, а третьої – $2x$ см.

2) Оскільки $P_{\triangle} = 47$ см, маємо рівняння: $x + (x + 7) + 2x = 47$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

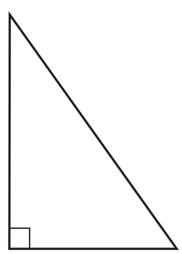
3) Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої – 17 см, третьої – 20 см.

Відповідь: 10 см, 17 см, 20 см.

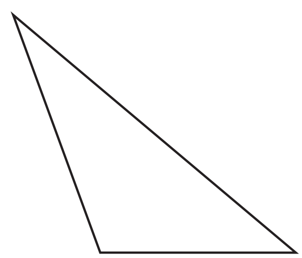
Класифікація трикутників за кутами



Гострокутний трикутник – **трикутник, у якого всі кути гострі.**



Прямокутний трикутник – **трикутник, у якого один кут прямий.**



Тупокутний трикутник – **трикутник, у якого один кут тупий.**

А ще раніше...

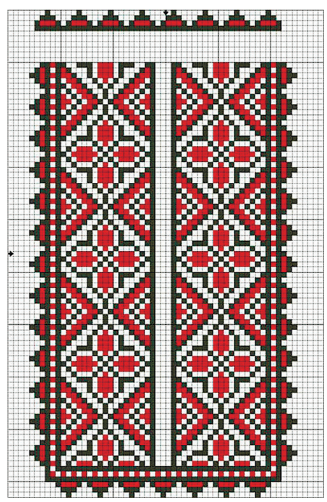
Трикутник вважався найпростішою замкненою прямолінійною фігурою. Властивості цієї фігури людство вивчало та використовувало в практичній діяльності з давніх-давен. Так, наприклад, у будівництві здавна використовують властивість жорсткості трикутника для укріплення різноманітних будівель, конструкцій тощо.

Зображення трикутників і задач, пов’язаних із трикутниками, дослідники знаходили в єгипетських папірусах, стародавніх індійських книгах, інших документах давнини.

У Давній Греції ще в VII ст. до н. е. були відомі деякі важливі факти, пов’язані з трикутником. Так, наприклад, Фалес довів, що трикутник можна однозначно задати стороною і двома прилеглими до неї кутами.

Найповніше вчення про трикутники виклав Евклід у першій книжці «Начал».

* * *



В Україні трикутник – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.

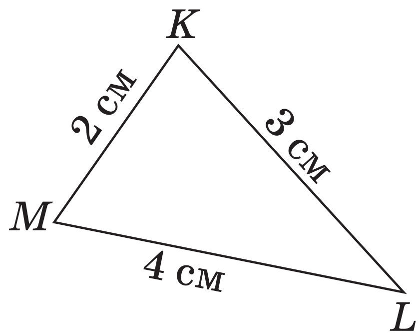
У давніх віруваннях трикутник – це символ брами у вічне життя і єдності трьох світів: земного, підземного і небесного. Це й три рівні буття, тривимірність світу. А ще – це три стихії: вода, вогонь та повітря.

Трикутник вершиною догори – це чоловічий символ, знак вогню, духу, а вершиною донизу символізує жіноче начало, матерію. Трикутники, що торкаються вершинами один до одного, ніби «пісковий годинник», символізують Світ та Антисвіт. А місце їхнього дотику може бути своєрідним місцем переходу з одного світу до іншого.

? Яку фігуру називають трикутником? ● Що називають вершинами трикутника, сторонами трикутника, кутами трикутника? ● Що називають периметром трикутника? ● Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

281. (*Усно*.) За малюнком 11.1 знайдіть периметр трикутника *KLM*.

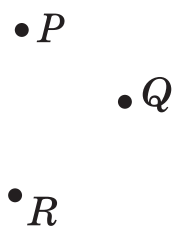


Мал. 11.1

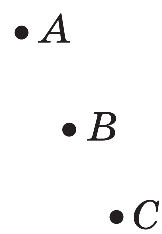
282. Накресліть △ *PKL*. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

283. Накресліть трикутник і позначте його вершини буквами *A*, *M* і *N*. Назвіть сторони і кути цього трикутника. Виконайте відповідні записи.

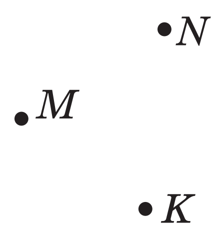
284. (*Усно*.) На якому з малюнків 11.2–11.4 три точки можуть бути вершинами трикутника, а на якому – ні?



Мал. 11.2



Мал. 11.3



Мал. 11.4

285. Знайдіть периметр трикутника зі сторонами 25 мм, 3,2 см, 0,4 дм.

286. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 4,3 см, 29 мм, 0,3 дм.

287. Накресліть гострокутний △ *ABC*. Виміряйте його сторони та знайдіть його периметр.

288. Накресліть тупокутний трикутник, вершинами якого є точки *P*, *L* і *K*. Виміряйте сторони цього трикутника та знайдіть його периметр.

289. Одна сторона трикутника втричі менша від другої і на 7 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

290. Одна сторона трикутника на 2 дм більша за другу і в 1,5 раза менша від третьої сторони. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 40 дм.

291. Використовуючи лінійку з поділками та транспортир, побудуйте $\triangle ABC$, у якого $\angle A = 60°$, $AB = 3$ см, $AC = 7$ см.

292. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та косинця $\triangle PKL$, у якого $\angle P = 90°$, $PK = 3$ см, $PL = 4$ см. Як називають такий трикутник? Виміряйте довжину сторони KL.

293. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 6, а периметр трикутника дорівнює 52 дм.

294. Периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

4 **295.** Укажіть, скількома способами можна назвати трикутник з вершинами в точках M, N і K. Запишіть усі ці назви.

296. Сума першої і другої сторін трикутника дорівнює 11 см, другої і третьої – 14 см, а першої і третьої – 13 см. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

297. Накресліть відрізок AB завдовжки 2 см 7 мм. Накресліть відрізок PL, що дорівнює відрізку AB.

298. Який кут утворює бісектриса кута 78° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

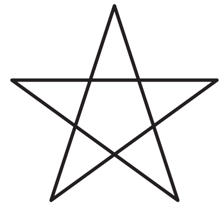
Життєва математика

299. Відомо, що 1 га лісу очищує за рік 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:

1) 3 га; 2) 2 км^2?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

300. Скільки чотирикутників у п'ятикутній зірці?

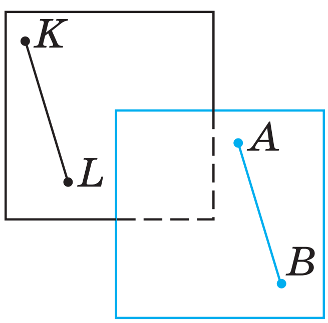


§ 12. Рівність геометричних фігур

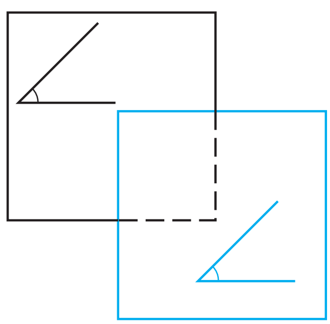
Загальне означення рівних фігур

> Два відрізки називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову довжину;
> два кути називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову градусну міру.

Розглянемо два рівних відрізки AB та KL, довжина кожного з яких по 2 см (мал. 12.1). Уявімо, наприклад, що відрізок AB накреслено на прозорій плівці. Переміщуючи плівку, відрізок AB можна сумістити з відрізком KL. Отже, рівні відрізки AB і KL можна *сумістити накладанням*.



Мал. 12.1



Мал. 12.2

Так само можна сумістити накладанням два рівних кути (мал. 12.2).

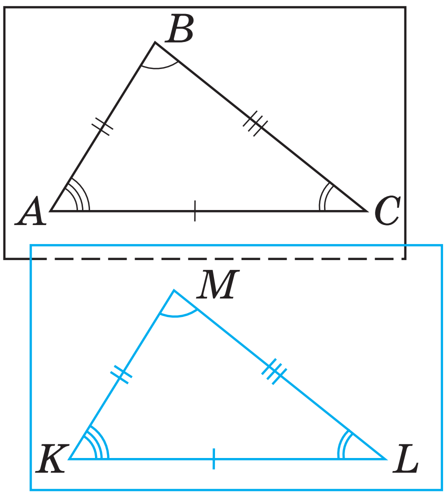
Таким чином, приходимо до загального означення рівних фігур:

геометричні фігури називають *рівними між собою*, якщо їх можна сумістити накладанням.

Зауважимо, що це означення не суперечить означенням рівних відрізків і рівних кутів, які ви вже знаєте.

Рівність трикутників

Тепер розглянемо питання рівності трикутників.



Трикутник *ABC* рівний трикутнику *KML*, бо кожен з них можна накласти на інший так, що вони збігатимуться.

Усі елементи трикутника *ABC* рівні елементам трикутника *KML*:

$$AC = KL,$$
$$AB = KM,$$
$$CB = LM,$$
$$\angle A = \angle K,$$
$$\angle B = \angle M,$$
$$\angle C = \angle L.$$

Записують:

$$\triangle ABC = \triangle KML.$$

Ті сторони і ті кути, які суміщаються при накладанні трикутників, будемо називати *відповідними сторонами* і *відповідними кутами*.

! Має значення порядок запису вершин рівних між собою трикутників, який встановлюється рівністю відповідних кутів цих трикутників.

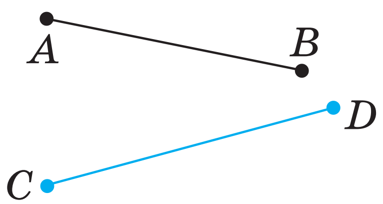
Запис $\triangle ABC = \triangle KLM$ означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, а запис $\triangle ABC = \triangle LKM$ – інше: $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle M$.

Які геометричні фігури називають рівними? • Рівність яких елементів трикутника можна встановити, виходячи з того, що $\triangle ABC = \triangle KLM$?

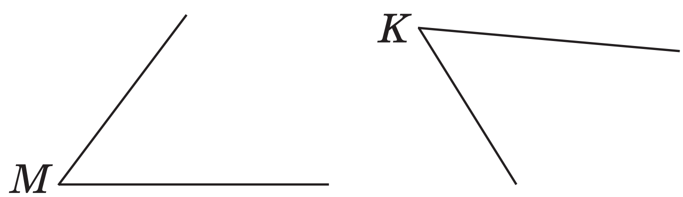
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

301. 1) Виміряйте довжини відрізків AB і CD на малюнку 12.3 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути M і K на малюнку 12.4 та встановіть, чи рівні вони.



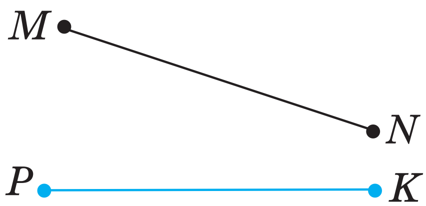
Мал. 12.3



Мал. 12.4

302. 1) Виміряйте довжини відрізків MN і PK на малюнку 12.5 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути A і B на малюнку 12.6 та встановіть, чи рівні вони.



Мал. 12.5

Мал. 12.6

303. (*Усно*.) 1) Чи можна сумістити накладанням відрізки AK і MF, якщо $AK = 1{,}7$ см, а $MF = 17$ мм?

2) Чи можна сумістити накладанням кути, градусні міри яких дорівнюють $27°$ і $31°$?

304. Дано: $\triangle ABC = \triangle MPL$. Доповніть записи:

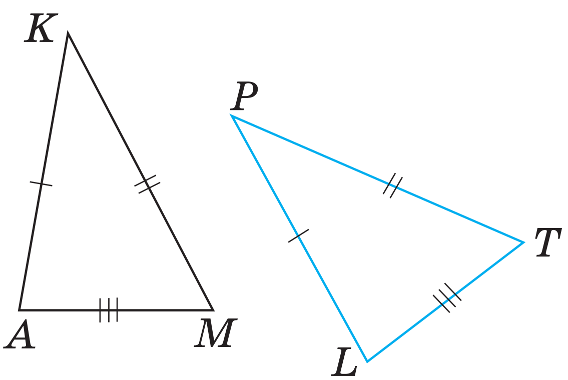
1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle B = \dots$; 3) $\angle C = \dots$.

305. Дано: $\triangle MPT = \triangle DCK$. Доповніть записи:

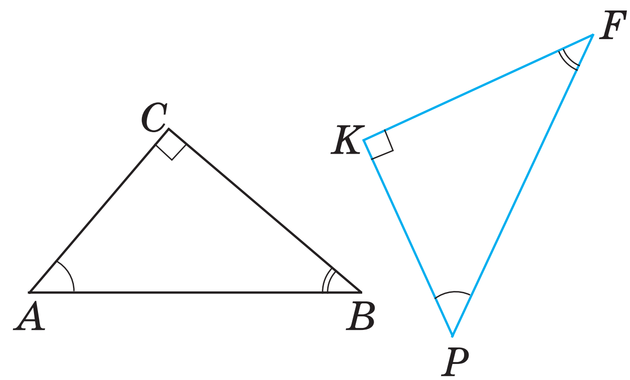
1) $MP = \dots$; 2) $PT = \dots$; 3) $MT = \dots$.

306. На малюнку 12.7 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle AKM = \dots$; 2) $\triangle MAK = \dots$.



Мал. 12.7



Мал. 12.8

307. На малюнку 12.8 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle ABC = \dots$; 2) $\triangle CAB = \dots$.

308. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KLP$, $AB = 6$ см, $LP = 8$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KLP.

309. Відомо, що $\triangle PMT = \triangle DCF$, $\angle P = 41°$, $\angle C = 92°$, $\angle T = 47°$. Знайдіть невідомі кути трикутників PMT і DCF.

310. 1) Периметри двох трикутників рівні. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

2) Периметр одного трикутника більший за периметр другого. Чи можуть ці трикутники бути рівними?

311. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CBA$. Чи є у трикутника ABC рівні сторони? Якщо так, назвіть їх.

312. Відомо, що $\triangle MNK = \triangle MKN$. Чи є у трикутника MNK рівні кути? Якщо так, назвіть їх.

4 **313.** Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 7$ см.

314. Дано: $\triangle PKL = \triangle KLP$. Знайдіть PK, якщо периметр трикутника PKL дорівнює 27 см.

Вправи для повторення

315. На прямій позначено вісім точок так, що відстань між кожними двома сусідніми точками – однакова. Відстань між крайніми точками дорівнює 112 см. Знайдіть відстань між двома сусідніми точками.

316. Розгорнутий кут поділили променями на три кути, один з яких удвічі менший від другого і втричі менший від третього. Знайдіть градусні міри цих трьох кутів.

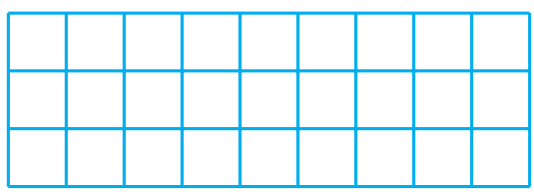
Життєва математика

317. 1) Скільки цегли і розчину потрібно для спорудження стіни 20 м завдовжки, 50 см завтовшки і 2,5 м заввишки, якщо на 1 м^3 кладки потрібно 400 цеглин, а витрати розчину становлять 20 % від обсягу кладки?

2) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо вартість однієї цеглини дорівнює 4,2 грн, а 1 м^3 розчину – 1520 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

318. Розріжте прямокутник, одна сторона якого дорівнює 3 клітинки, а друга – 9 клітинок, на вісім квадратів так, щоб розрізи проходили по сторонах клітинок.



§ 13. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Ознаки рівності трикутників

Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їхні елементи. Це важливо для практики, наприклад, для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну.

Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

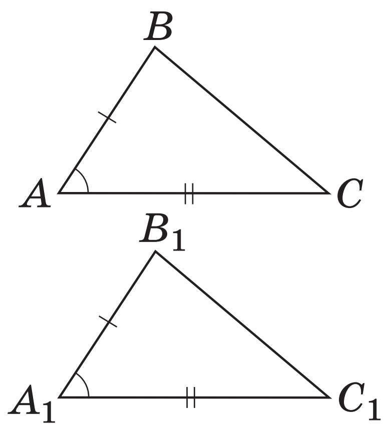
Перша ознака рівності трикутників

Розглянемо *першу ознаку рівності трикутників*.

Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників). **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

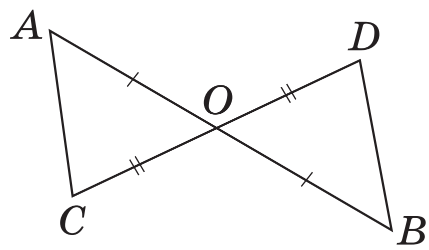
Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (див. мал.).

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC – на промінь A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, після накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■



Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними*.

Приклад 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

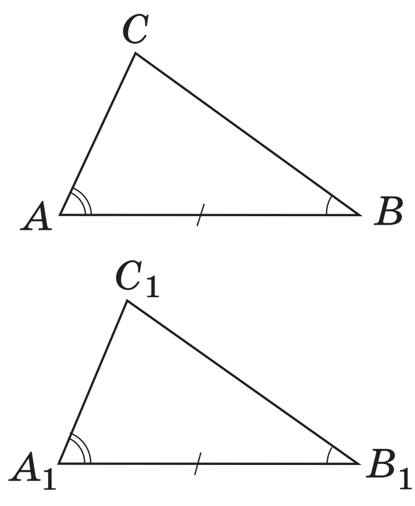


Доведення. Розглянемо малюнок. За умовою $AO = OB$ і $CO = OD$. Окрім того, $\angle AOC = \angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$. ■

Друга ознака рівності трикутників

Т Теорема 2 (друга ознака рівності трикутників). **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

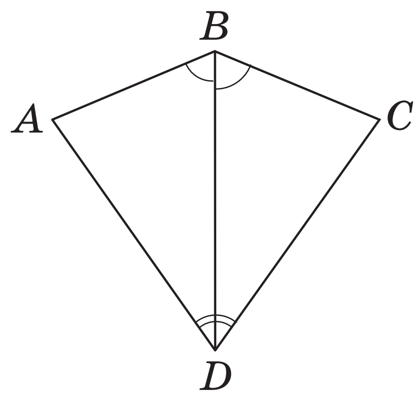
Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (див. мал.).



Оскільки $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC$ можна накласти на $\triangle A_1B_1C_1$ так, що вершина A збігатиметься з вершиною A_1, вершина B – з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC – на промінь B_1C_1. Тоді точка C – спільна точка променів AC і BC – збігатиметься з точкою C_1 – спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за стороною і двома прилеглими кутами*.

Приклад 2. Довести рівність кутів A і C (див. мал.), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.



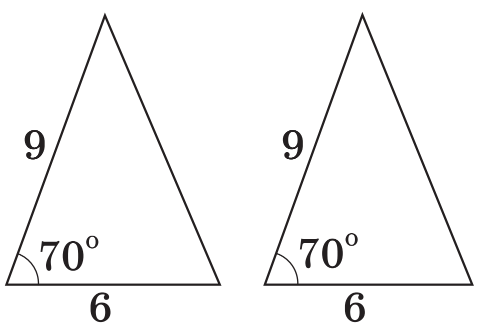
Доведення. 1) Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\triangle ABD = \triangle CBD$.

2) Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$. ■

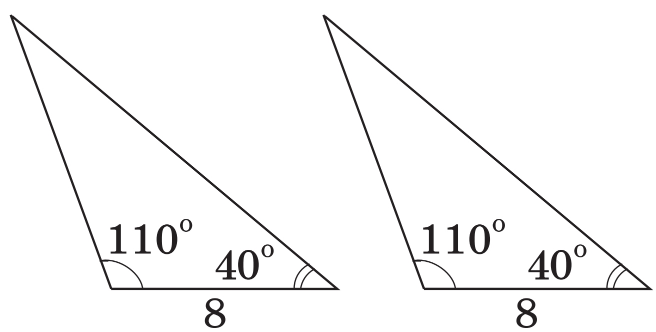
? Сформулюйте та доведіть першу ознаку рівності трикутників. ● Сформулюйте та доведіть другу ознаку рівності трикутників.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **319**. (*Усно*.) Трикутники на малюнках 13.1, 13.2 рівні між собою. За якою ознакою?

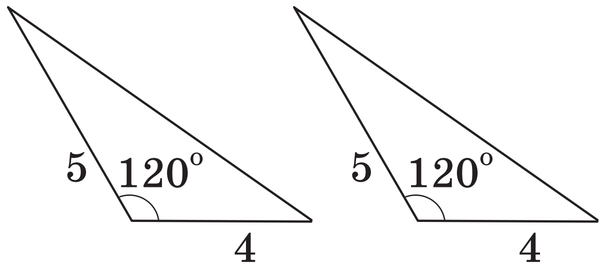


Мал. 13.1

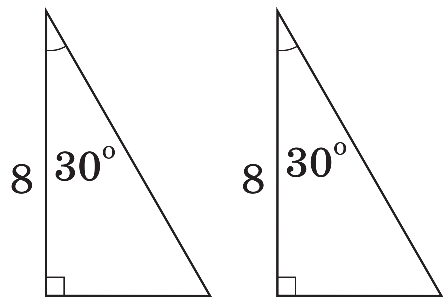


Мал. 13.2

320. Трикутники на малюнках 13.3, 13.4 рівні між собою. За якою ознакою?

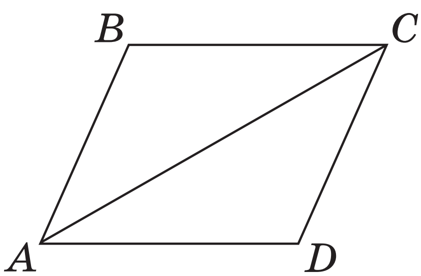


Мал. 13.3

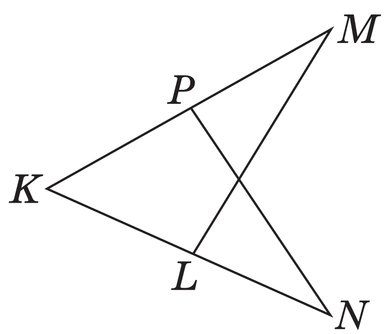


Мал. 13.4

321. Назвіть спільний елемент трикутників *ABC* і *CDA* (мал. 13.5) та трикутників *KML* і *KNP* (мал. 13.6).



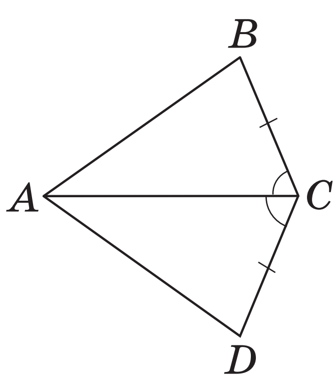
Мал. 13.5



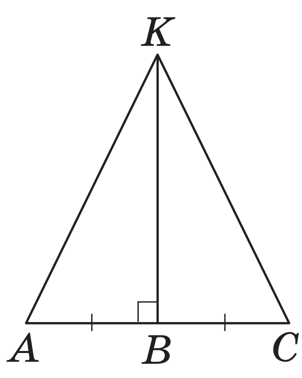
Мал. 13.6

2 **322.** Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$ (мал. 13.7), якщо $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$.

323. Дано: $AB = BC$, $BK \perp AC$ (мал. 13.8).
Довести: $\triangle ABK = \triangle CBK$.



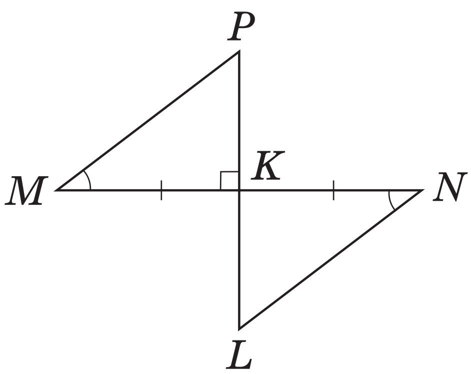
Мал. 13.7



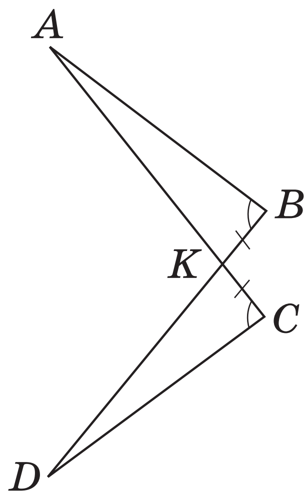
Мал. 13.8

324. Дано: $MK = KN$, $\angle M = \angle N$, $PL \perp MN$ (мал. 13.9). Довести: $\triangle MKP = \triangle NKL$.

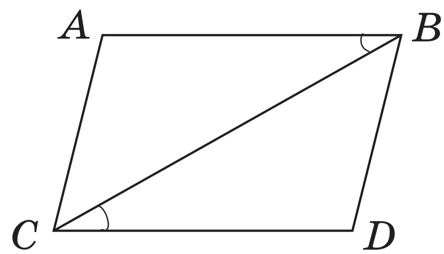
325. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCK$ (мал. 13.10), якщо $KB = KC$ і $\angle ABK = \angle DCK$.



Мал. 13.9



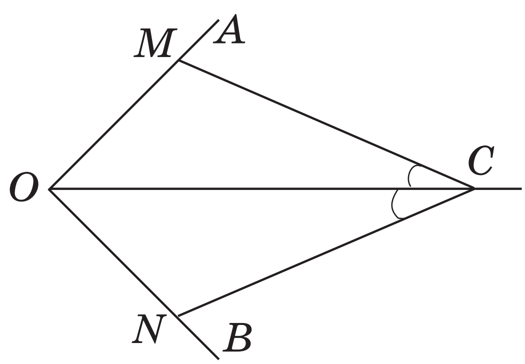
Мал. 13.10



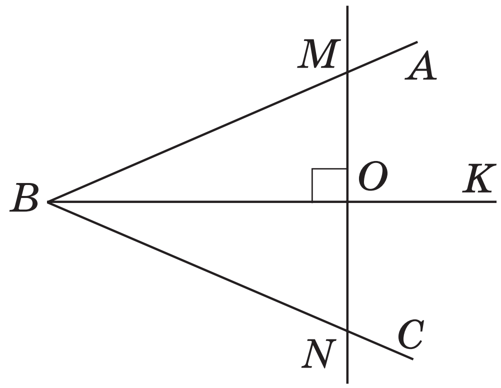
Мал. 13.11

326. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$ (мал. 13.11), якщо $AB = CD$ і $\angle ABC = \angle BCD$.

327. Промінь OC є бісектрисою кута AOB (мал. 13.12), $\angle OCM = \angle OCN$. Доведіть, що $\triangle OMC = \triangle ONC$.



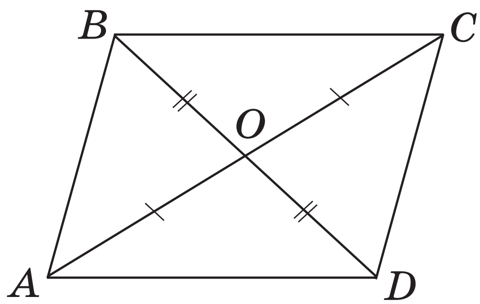
Мал. 13.12



Мал. 13.13

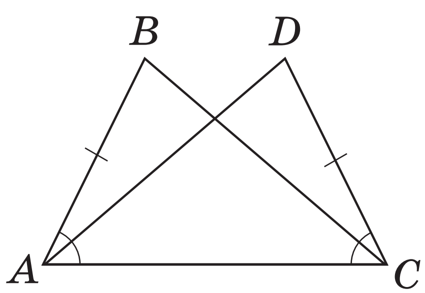
3 **328**. Промінь BK є бісектрисою кута ABC (мал. 13.13), $MN \perp BK$. Доведіть, що $MO = ON$.

329. Дано: $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 13.14).
Довести: $AB = CD$, $BC = AD$.

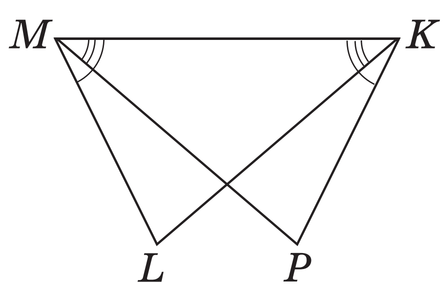


Мал. 13.14

330. Дано: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$ (мал. 13.15).
Довести: $\triangle ABC = \triangle CDA$.



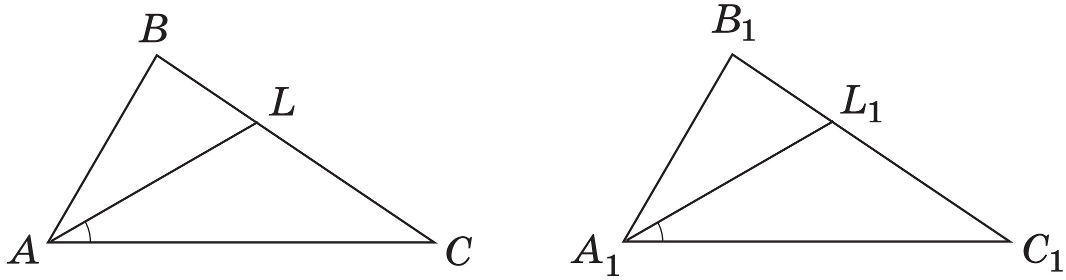
Мал. 13.15



Мал. 13.16

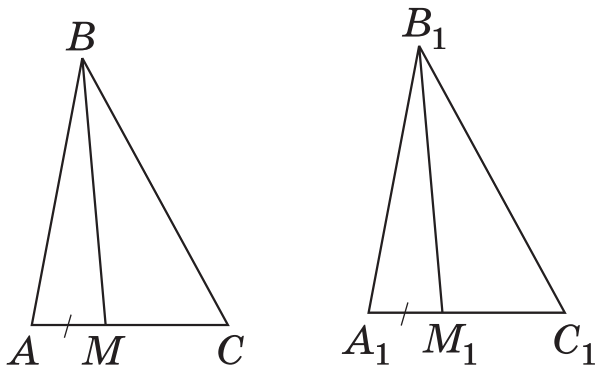
331. Доведіть рівність трикутників MKL і KMP, зображених на малюнку 13.16, якщо $\angle LMK = \angle PKM$ і $\angle LKM = \angle PMK$.

332. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC і B_1C_1 позначено відповідно точки L і L_1 такі, що $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (мал. 13.17). Доведіть, що $\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$.



Мал. 13.17

333. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено відповідно точки M і M_1 такі, що $AM = A_1M_1$ (мал. 13.18). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.



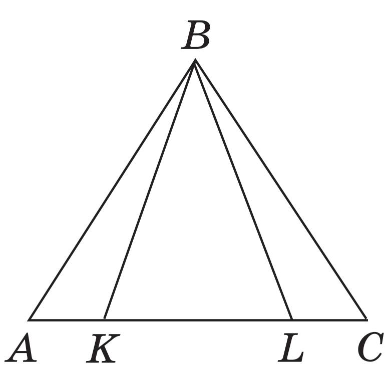
Мал. 13.18

4 **334.** Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

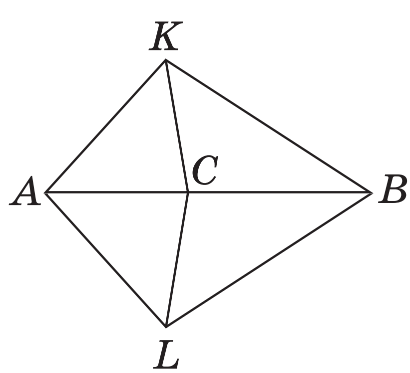
335. Чи можна стверджувати, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні та двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

336. $\triangle ABK = \triangle CBL$ (мал. 13.19). Доведіть, що $\triangle ABL = \triangle CBK$.

337. $\triangle AKC = \triangle ALC$ (мал. 13.20). Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle BLC$.



Мал. 13.19



Мал. 13.20

338. На бісектрисі кута A позначили точку B, а на його сторонах такі точки M і N, що $\angle ABM = \angle ABN$. Доведіть, що $MN \perp AB$.

Вправи для повторення

339. Одна зі сторін трикутника дорівнює 4 дм, що на 12 см менше від другої сторони й удвічі більше за третю. Знайдіть периметр трикутника.

340. Сума трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює $270°$. Чи перпендикулярні прямі a і c; b і c?

Життєва математика

341. Підлогу кімнати, що має форму прямокутника зі сторонами 3,5 м і 6 м, потрібно вкрити ламінатом з прямокутних дощечок зі сторонами 7 см і 40 см. Скільки потрібно таких дощечок?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

342. Знайдіть периметр трикутника, дві сторони якого дорівнюють по 6 см, а третя сторона – 8 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

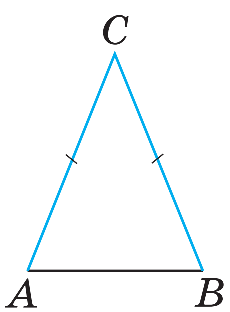
343. Як з прямокутників, що мають розміри 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, ..., 1×100, скласти прямокутник, кожна сторона якого більша за 1?

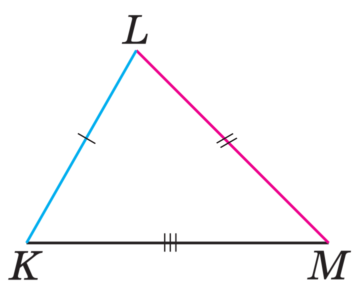
§ 14. Рівнобедрений трикутник

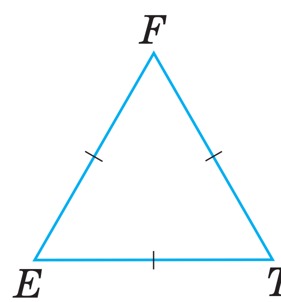
Класифікація трикутників за сторонами

Ви вже вмієте класифікувати трикутники за кутами. Розглянемо класифікацію трикутників залежно від їхніх сторін.

Трикутник, у якого дві сторони рівні, –	**Трикутник, усі сторони якого різні завдовжки, –**	**Трикутник, усі сторони якого рівні, –**
рівнобедрений трикутник	**різносторонній трикутник**	**рівносторонній трикутник**







Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а його третю сторону – *основою*.

У рівнобедреному трикутнику ABC: AB – основа, AC і BC – бічні сторони.

Властивість рівнобедреного трикутника

Розглянемо важливу властивість кутів рівнобедреного трикутника.

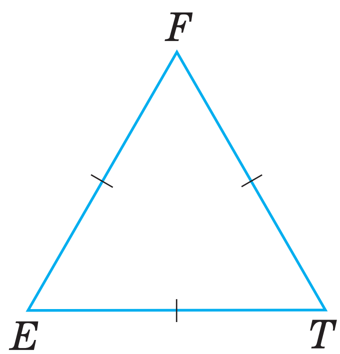
Теорема 1 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). **У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.**

Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (див. мал. на с. 125). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.

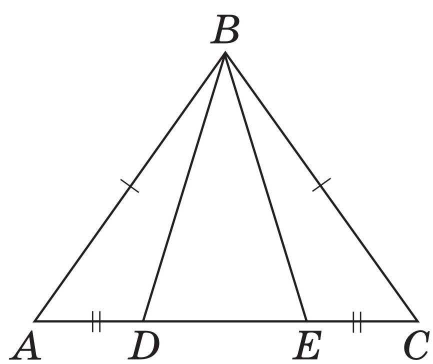
Оскільки $AC = BC$, $CB = CA$ і $\angle C$ – спільний для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за першою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено. ■

Н Наслідок. **У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.**

Доведення. Розглянемо рівносторонній $\triangle EFT$ (мал. 14.1), у якого $EF = FT = ET$. Оскільки $EF = FT$, то його можна вважати рівнобедреним з основою ET. Тому $\angle E = \angle T$. Аналогічно (вважаючи основою FT) маємо, що $\angle F = \angle T$. Отже, $\angle E = \angle T = \angle F$. ■



Мал. 14.1



Мал. 14.2

Приклад 1. На малюнку 14.2 $AB = BC$, $AD = EC$. Довести, що $\angle BDE = \angle BED$.

Доведення. 1) Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AC. Тому $\angle A = \angle C$.

2) $\triangle BAD = \triangle BCE$ (за першою ознакою). Тому $BD = BE$.

3) Отже, $\triangle BDE$ – рівнобедрений з основою DE. Тому $\angle BDE = \angle BED$, що й потрібно було довести. ■

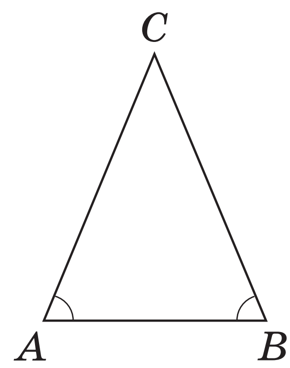
Ознака рівнобедреного трикутника

Розглянемо ознаку рівнобедреного трикутника.

Т Теорема 2 (ознака рівнобедреного трикутника). **Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.**

Доведення. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (див. мал.). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.

Оскільки $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ і AB – спільна сторона для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за другою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Тому $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Теорему доведено. ■

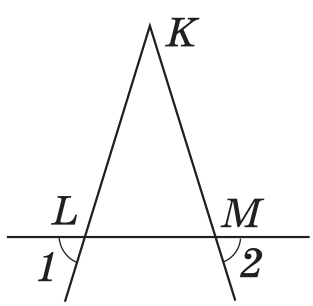


Зауважимо, що розглянута теорема є оберненою до теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

Н Наслідок. **Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.**

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ – рівносторонній. ■

Приклад 2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.).
Довести: $\triangle KLM$ – рівнобедрений.
Доведення. 1) $\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні), $\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні).
2) $\angle 1 = \angle 2$ (за умовою). Тому $\angle KLM = \angle KML$.
3) Отже, $\triangle KLM$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). ■

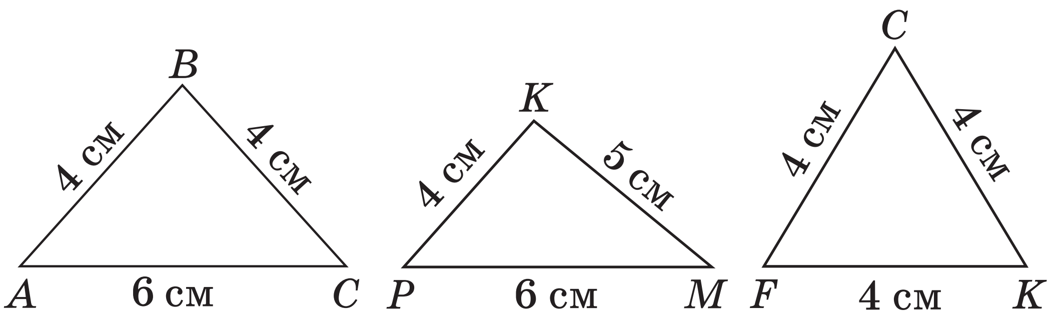


Який трикутник називають рівнобедреним; різностороннім; рівностороннім? ● Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника та наслідок з неї. ● Сформулюйте та доведіть ознаку рівнобедреного трикутника та наслідок з неї.

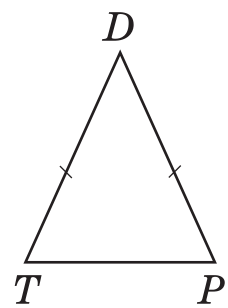
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

344. (*Усно.*) Який з трикутників, зображених на малюнку 14.3, є рівнобедреним, який – рівностороннім, а який – різностороннім? Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, зображеного на цьому малюнку.



Мал. 14.3



Мал. 14.4

345. Укажіть основу та бічні сторони трикутника *DTP* (мал. 14.4). Що можна сказати про кути *T* і *P* цього трикутника?

346. Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть другий кут при основі цього трикутника.

347. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 9 см, ще одна сторона – 6 см. Яка довжина третьої сторони?

348. $\triangle ABC$ – рівносторонній, $AB = 12$ см. Знайдіть його периметр.

349. Периметр рівностороннього трикутника *ABC* дорівнює 18 см. Знайдіть довжину сторони *BC* цього трикутника.

2 **350**. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 7 см, а основа на 2 см менша від бічної сторони.

351. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

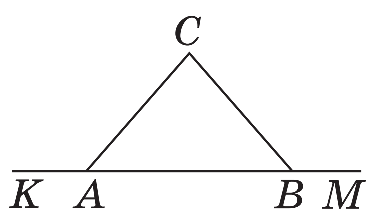
352. (*Усно.*) Чи може бути рівнобедреним трикутник, усі кути якого різні? Відповідь обґрунтуйте.

353. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона – 7 см. Знайдіть основу трикутника.

354. Периметр рівнобедреного трикутника AMN з основою MN дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину основи MN, якщо $AM = 7$ дм.

355. Периметр рівнобедреного трикутника ACD з бічними сторонами AC і AD дорівнює 30 дм. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо $CD = 12$ дм.

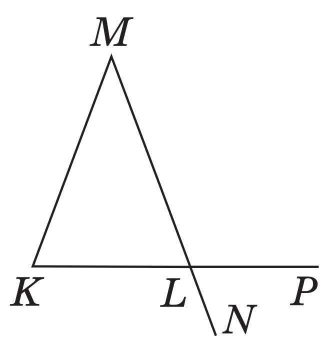
356. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 17 см, а основа – 5 см.



Мал. 14.5

357. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB (мал. 14.5). Доведіть, що $\angle KAC = \angle MBC$.

358. $\triangle KLM$ – рівнобедрений з основою KL (мал. 14.6). Доведіть, що $\angle MKL = \angle PLN$.



Мал. 14.6

359. Чи правильні твердження:
1) будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним;
2) будь-який рівнобедрений трикутник є рівностороннім?

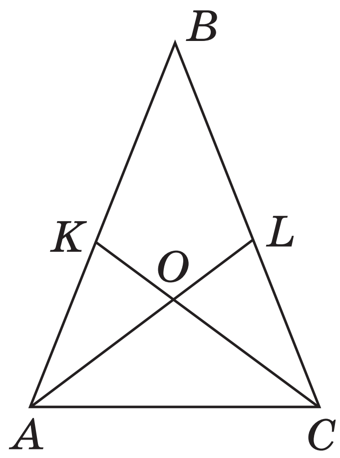
3 **360**. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см і він більший за суму двох бічних сторін на 6 см.

361. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 44 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

362. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 35 дм, а основа вдвічі менша від бічної сторони.

363. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $AK = LC$ (мал. 14.7). Доведіть, що $AL = KC$.

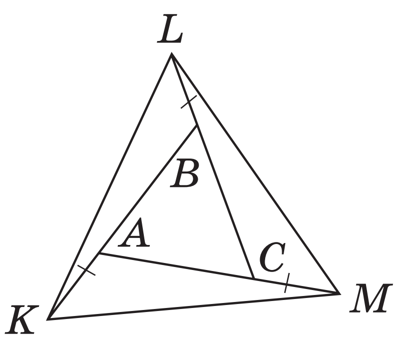
364. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $\angle KCA = \angle LAC$ (мал. 14.7). Доведіть, що відрізки AK і CL рівні.



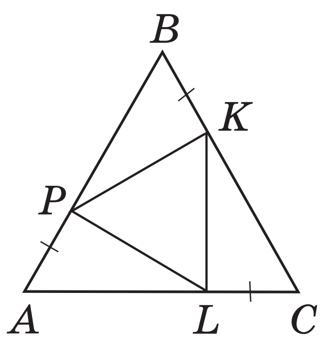
Мал. 14.7

4 **365**. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AK, BL і CM (мал. 14.8). Доведіть, що $\triangle KLM$ – рівносторонній.

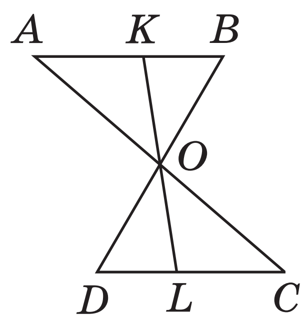
366. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BK і CL (мал. 14.9). Доведіть, що $\triangle PKL$ – рівносторонній.



Мал. 14.8



Мал. 14.9



Мал. 14.10

Вправи для повторення

367. Доведіть, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°.

368. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O так, що $\triangle AOB = \triangle COD$ (мал. 14.10). Точка K належить відрізку AB, а точка L – відрізку DC, причому KL проходить через точку O. Доведіть, що $KO = OL$ і $KB = DL$.

369. На відрізку $AB = 48$ см позначено точку K так, що $5AK = 7BK$. Знайдіть довжини відрізків AK і BK.

Життєва математика

370. Одне дерево очищає за рік зону у формі прямокутного паралелепіпеда 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 200 каштанів, посаджених уздовж дороги.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

371. Знайдіть по два розв'язки кожної з анаграм (одна з анаграм є геометричним терміном, який ви знаєте з попередніх класів): 1) НОСУК; 2) ТСОРЕК.

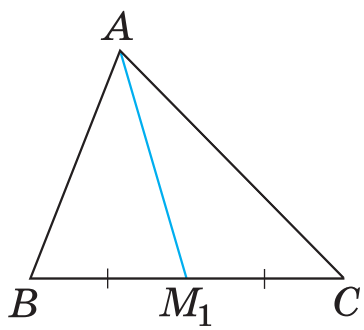
§ 15. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

У кожному трикутнику можна провести кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

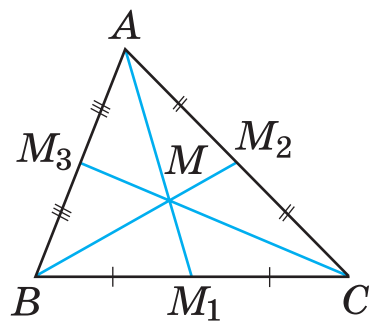
Медіана трикутника

Медіаною трикутника **називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На малюнку 15.1 відрізок AM_1 – медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 15.2 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 – медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.



Мал. 15.1



Мал. 15.2

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають *центроїдом* трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

На малюнку 15.2 точка M – центроїд трикутника ABC.

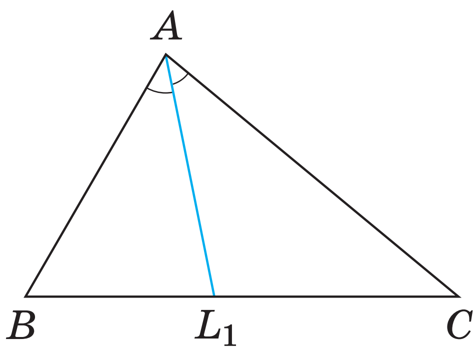
Цю властивість буде доведено у старших класах.

Бісектриса трикутника

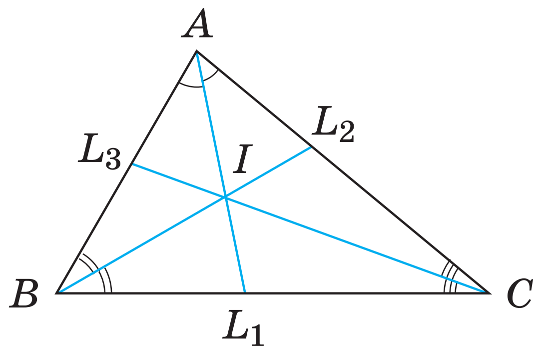
Бісектрисою трикутника **називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.**

На малюнку 15.3 відрізок AL_1 – бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1.

Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 15.4 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 – бісектриси трикутника ABC.



Мал. 15.3



Мал. 15.4

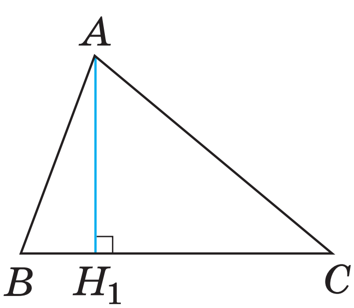
У § 23 доведемо, що *в будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці* (її називають ***інцентром***).

На малюнку 15.4 точка I – інцентр трикутника ABC.

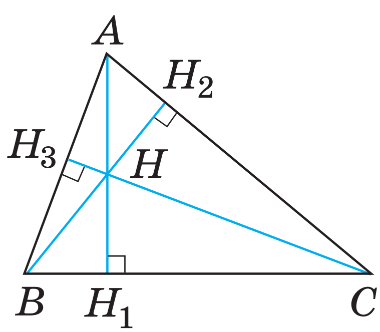
Висота трикутника

Висотою трикутника **називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

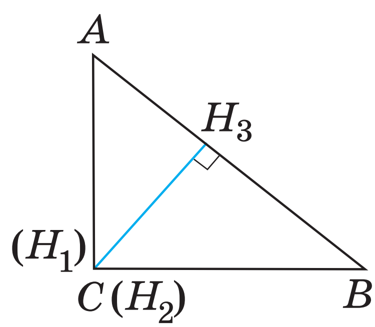
На малюнку 15.5 відрізок AH_1 – висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 15.6 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 15.7 ці відрізки – висоти прямокутного трикутника ABC з прямим



Мал. 15.5

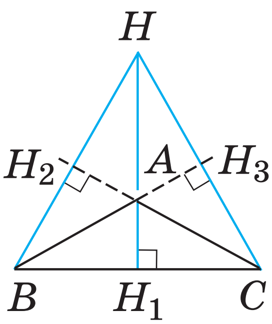


Мал. 15.6



Мал. 15.7

кутом C, а на малюнку 15.8 ці відрізки – висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A.



Мал. 15.8

У старших класах буде доведено, що *в будь-якому трикутнику три висоти або їхні продовження перетинаються в одній точці* (її називають ***ортоцентром*** трикутника). На малюнках 15.6 і 15.8 точка H – ортоцентр трикутника ABC, на малюнку 15.7 ортоцентр трикутника збігається з точкою C – вершиною прямого кута трикутника ABC.

Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т Теорема (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника). **У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.**

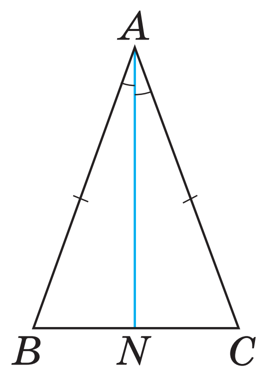
Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою BC, AN – його бісектриса (мал. 15.9). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $AB = AC$, $\angle BAN = \angle CAN$ (за умовою), а відрізок AN є спільною стороною трикутників BAN і CAN, то $\triangle BAN = \triangle CAN$ (за першою ознакою).

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN – медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні й рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90°$. Отже, AN є також висотою.

Теорему доведено. ■



Мал. 15.9

Істер_Геометрія_П_7_ч.1_[СлЗ]_(028-24)_V1.indd 134 09.07.2024 12:45:12

Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справджуються такі наслідки з теореми.

Наслідок. **Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.**
Наслідок. **Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою.**

Приклад. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено бісектрису AN (мал. 15.9), $AN = 12$ см. Знайти периметр трикутника ANB, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

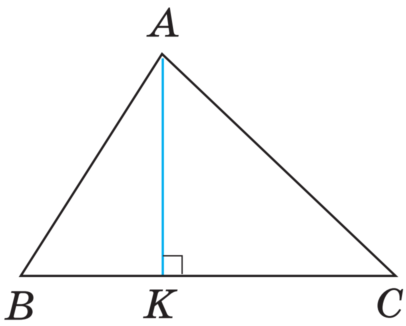
Розв'язання. 1) Оскільки $\triangle ABC$ – рівнобедрений, а AN – бісектриса, що проведена до основи цього трикутника, то AN є також і медіаною. Тому $BN = NC$.
2) Позначимо $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника ABC, $P_{\triangle ANB}$ – периметр трикутника ANB, який потрібно знайти.
$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BN + NC$.
За умовою $AB = AC$, крім того $BN = NC$. Тому $P_{\triangle ABC} = AB + AB + BN + BN = 2(AB + BN)$. За умовою $P_{\triangle ABC} = 36$ (см). Тому $2(AB + BN) = 36$, $AB + BN = 18$ (см).
3) $P_{\triangle ANB} = AN + AB + BN = AN + (AB + BN) = 12 + 18 = 30$ (см).
Відповідь: 30 см.

? Який відрізок називають медіаною трикутника? • Скільки медіан має трикутник? • Який відрізок називають бісектрисою трикутника? • Скільки бісектрис має трикутник? • Який відрізок називають висотою трикутника? • Скільки висот має трикутник? • Сформулюйте та доведіть теорему про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.

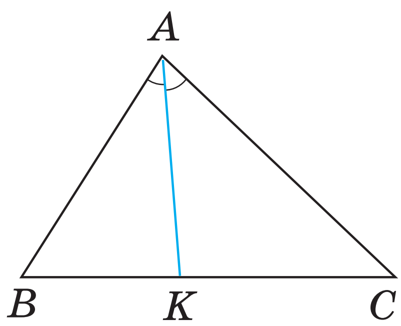
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

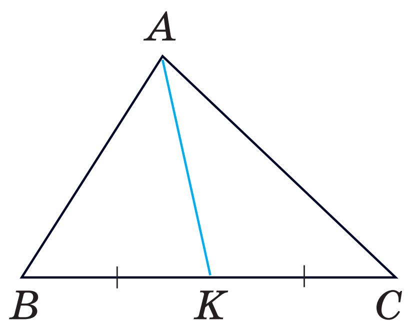
372. (*Усно.*) Як називають відрізок AK у трикутнику ABC (мал. 15.10–15.12)?



Мал. 15.10



Мал. 15.11

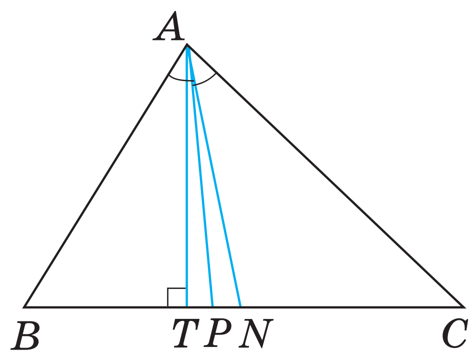


Мал. 15.12

373. 1) Як у трикутнику ABC називають відрізок AT (мал. 15.13), якщо він є перпендикуляром до прямої BC?

2) Як у трикутнику ABC називають відрізок AN, якщо $BN = NC$?

3) Як у трикутнику ABC називають відрізок AP, якщо $\angle BAP = \angle PAC$?



Мал. 15.13

374. У трикутнику ABC відрізок AK – висота (мал. 15.10). Знайдіть градусні міри кутів BKA і CKA.

375. У трикутнику ABC відрізок AK – бісектриса (мал. 15.11), $\angle BAK = 40°$. Знайдіть градусну міру кута BAC.

376. У трикутнику ABC відрізок AK – медіана (мал. 15.12), $BC = 12$ см. Знайдіть довжини відрізків BK і KC.

2

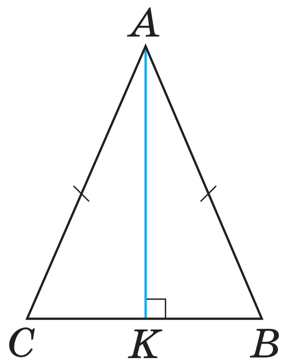
377. Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть його медіани.

378. Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси.

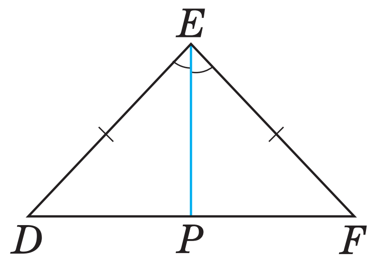
379. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

380. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

381. На малюнку 15.14 відрізок *AK* – висота рівнобедреного трикутника *ABC* з основою *BC*. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.



Мал. 15.14



Мал. 15.15

382. На малюнку 15.15 відрізок *EP* – бісектриса рівнобедреного трикутника *DEF* з основою *DF*. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

383. (*Усно*.) Чому не можна стверджувати, що три висоти трикутника завжди перетинаються в одній точці?

384. У трикутнику *ABC* $\angle B = \angle C$. Бісектриса, проведена до якої зі сторін, є одночасно і медіаною, і висотою?

385. (*Усно*.) Які елементи трикутника або їхні частини сумістяться, якщо його зігнути по:
1) бісектрисі; 2) висоті?

386. Доведіть, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

387. Доведіть, що коли медіана трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задач 386 і 387 можна вважати ознаками рівнобедреного трикутника.

388. AD і A_1D_1 – відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

389. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, – рівні.

390. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, – рівні.

391. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см, а периметр трикутника ABD дорівнює 40 см.

392. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено медіану CK. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 12 см, а периметр трикутника ABC – 16 см.

393. Доведіть, що коли медіана трикутника є його бісектрисою, то трикутник – рівнобедрений.

Примітка. Твердження задачі 393 можна вважати ознакою рівнобедреного трикутника.

Вправи для повторення

394. Два з восьми кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c, дорівнюють 30° і 140°. Чи можуть прямі a і b бути паралельними?

395. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На його стороні побудували рівнобедрений трикутник так, що сторона даного трикутника є основою рівнобедреного. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 18 см.

396. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого – 69 см, а його основа складає 30 % від бічної сторони.

Життєва математика

397. Визначте суму грошей, яку потрібно сплатити за фарбування тренажерного залу, ширина, довжина і висота якого – 9,4 м, 6,5 м, 3,2 м. Фарбування одного квадратного метра коштує 25 грн. Вікна та двері складають 9 % від загальної площі стін. Округліть до десятків гривень.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

398. Олесь придбав акваріум у формі куба, що вміщує 125 л води. Він наповнив акваріум, не доливши до краю 6 см. Скільки літрів води Олесь налив у акваріум?

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. 9. 2) 6; 3) 16. **10**. 2) 3; 3) 7. **15**. 6069. **§ 2. 29**. 17 см. **30**. 6 см. **31**. 10,1 см або 0,3 см; два розв’язки. **32**. 9,7 см або 4,7 см; два розв’язки. **33**. Харків. **34**. Стус. **§ 3. 55.** 1) 180°; 2) 90°; 3) 30°; 4) 120°. **56**. 1) 90°; 2) 180°; 3) 150°; 4) 60°. **57**. 20°. **58**. 112°. **59**. 76°. **60**. 131°. **61**. Кравчук. **62**. Варшава. **63**. 60°. **64**. 60°.

Вправи для повторення розділу 1

75. 1) Два, або три, або чотири. 2) Від двох до $n + 1$ частин. **77.** 8 см. **79.** $\frac{a}{2}$ см. **84.** 1) 90°; 42°; 138°; 2) 30′; 3°; 20°. **85.** 1) 30°; 2) 148°. **86.** 1) 70°; 2) 146°. **87.** $\angle AOM = 72°$; $\angle MOB = 96°$.

Розділ 2

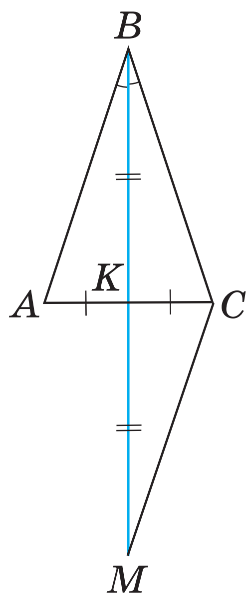
§ 5. 101. 81° і 99°; 2) 54° і 126°. **102.** 1) 45° і 135°; 2) 36° і 144°. **103.** 40° і 100°. **104.** $\angle A = 100°$; $\angle B = 75°$. **105.** 90°. **106.** 40° і 80°. **107.** 80° і 60°. **108.** 72° і 108° або 60° і 120°. **112.** 1) Кут; 2) пряма; 3) Евклід; 4) геометрія. **§ 6. 121.** 62°. **125.** 1) Усі по 90°; 2) 89°; 91°; 89°; 91°. **126.** 1) 8°; 172°; 8°; 172°; 2) усі по 90°. **127.** 1) 81°; 2) 67°; 3) 80°. **128.** 1) 60°; 2) 30°. **129.** 100°. **130.** 50°. **131.** 180°. **133.** 18 см. **§ 7. 150.** 1) 65°; 2) 60°. **151.** 1) 50°; 2) 127°. **154.** 140°. **155.** 110°. **160.** 72° і 108°. **§ 8. 172.** 3) 60°. **173.** 3) 50°. **179.** 36°. **181.** Ні. **§ 9. 192.** $a \parallel b$. **193.** $b \parallel c$. **200.** 1) 190°; 2) 170°; 3) 170°. **201.** 1) 200°; 2) 160°; 3) 200°. **202.** Ні. **203.** Так. **204.** Ні. **205.** Ні. **209.** 100°. **211.** Так. **§ 10. 226.** 1) 82° і 98°; 2) 45° і 135°; 3) 75° і 105°. **227.** 1) 36° і 144°; 2) 86° і 94°; 3) 100° і 80°. **228.** $x = 70°$ (мал. 10.13); $x = 65°$ (мал. 10.14); $x = 129°$ (мал. 10.15). **229.** $x = 50°$ (мал. 10.16); $x = 110°$ (мал. 10.17). **230.** Ні. **231.** Чотири кути по 40° і чотири кути по 140°. **232.** Чотири кути по 32° і чотири кути по 148°. **233.** 130°. **234.** 100°. **238.** Франко.

Вправи для повторення розділу 2

246. 54° і 126°. **247.** 30° і 150°. **248.** 80° і 100°. **249.** 144°. **254.** 66°. **255.** 120°. **256.** 1) 36°; 144°; 36°; 144°; 2) 50°; 130°; 50°; 130°. **257.** 40°. **263.** 1), 2) Так. **273.** Ні. **274.** Так. **277.** 80° і 100°. **279.** 90°. **280.** 70°.

Розділ 3

§ 11. 289. 5 см; 15 см; 12 см. **290.** 12 дм; 10 дм; 18 дм. **293.** 12 дм; 16 дм; 24 дм. **294.** 16 см; 24 см; 32 см. **296.** 19 см. **298.** 141°. **300.** 5 чотирикутників. **§ 12. 310.** 1), 2) Ні. **311.** Так, $AB = BC$. **312.** Так, $\angle N = \angle K$. **313.** 21 см. **314.** 9 см. **315.** 16 см. **316.** 30°; 60°; 90°. **§ 13. 338.** *Порада.* Нехай точка O – точка перетину AB і MN. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$. **§ 14. 360.** 4 см; 4 см; 6 см. **361.** 12 см; 16 см; 16 см. **362.** 7 дм; 14 дм; 14 дм. **369.** $AK = 28$ см; $BK = 20$ см. **371.** 1) Конус, сукно; 2) сектор, корсет. **§ 15. 391.** 60 см. **392.** 4 см. **393.** *Порада.* Нехай BK – бісектриса і медіана трикутника ABC (див. мал.). Продовжте BK за точку K на дов-



жину відрізка *BK* (*BK* = *KM*). Доведіть рівність трикутників *ABK* і *CMK*.
395. 4 см; 7 см; 7 см. **396.** 9 см; 30 см; 30 см. **398.** 110 л.

Відповіді до завдань у тестовій формі «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	В	Г	В	А	Г	1–Г; 2–А; 3–Б
2	Г	Б	Г	Б	А	В	В	Б	А	В	Б	Г	1–В; 2–А; 3–Б

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Відеоуроки автора за темами підручника можна переглянути за посиланням https://cutt.ly/jw8Dhib3 або *QR*-кодом.

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім’я учня / учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					